Plaquette 1 – Intervalles, valeur absolue et calcul exact

Nombres et calculs — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules et méthodes pour les nombres et le calcul exact.

— Ensembles de nombres emboîtés : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Un nombre est dans $\mathbb{Q}$ s'il s'écrit $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$.

— Intervalles : $[a\,;b]$ contient a et b, $]a\,;b[$ ne les contient pas ; $[a\,;+\infty[$ signifie $x \geq a$.

— Valeur absolue et distance : $|a-b|$ est la **distance** entre a et b sur la droite des réels, et

$$|x-a| \leq r \Leftrightarrow x \in [a-r\,;a+r]$$

— Puissances : $a^m \times a^n = a^{m+n}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

— Racines carrées : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$ pour $a \geq 0$, et $\sqrt{a^2} = |a|$.

— Écriture scientifique : $a \times 10^n$ avec $1 \leq |a| < 10$.

Correction de l'exercice 1 – Reconnaître un ensemble de nombres

On utilise les inclusions du cours : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, et le fait qu'un nombre rationnel est un quotient de deux entiers.

— -7 est un entier négatif : $-7 \in \mathbb{Z}$ (pas dans $\mathbb{N}$, qui ne contient que les entiers positifs).

— $\frac{4}{2} = 2$: c'est un entier naturel, donc $\frac{4}{2} \in \mathbb{N}$. Il faut simplifier avant de conclure.

— $\frac{2}{3}$ n'est pas un entier (le quotient ne se simplifie pas) : $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$.

— $\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 9$: donc $\sqrt{9} \in \mathbb{N}$.

— $\sqrt{2}$ n'est le quotient d'aucun couple d'entiers : $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ seulement (c'est un irrationnel).

— $-3{,}5 = -\frac{7}{2}$: c'est un quotient d'entiers, donc $-3{,}5 \in \mathbb{Q}$.

Réponse. $-7 \in \mathbb{Z}$; $\frac{4}{2} \in \mathbb{N}$; $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{9} \in \mathbb{N}$; $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$; $-3{,}5 \in \mathbb{Q}$.

Correction de l'exercice 2 – Traduire une inégalité par un intervalle

Règle du cours : un crochet **fermé** [ou] tourné vers l'intérieur signifie que la borne est atteinte ($\leq$ ou $\geq$), un crochet **ouvert** qu'elle ne l'est pas ($<$ ou $>$). L'infini n'étant pas un nombre, le crochet est toujours ouvert de son côté.

a) $x \geq -2$ donne $x \in [-2\,;+\infty[$.

b) $-1 < x \leq 5$ donne $x \in]-1\,;5]$: ouvert en -1, fermé en 5.

c) $x < 3$ donne $x \in]-\infty\,;3[$.

d) Tous les réels : $x \in]-\infty\,;+\infty[= \mathbb{R}$.

Réponse. a) $[-2\,;+\infty[$ · b) $]-1\,;5]$ · c) $]-\infty\,;3[$ · d) $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3 – Intersection et réunion d'intervalles

Méthode du cours : on place les deux intervalles sur une même droite graduée, puis on lit la partie **commune** pour $\cap$ et la partie **totale** pour $\cup$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— I va de -3 (inclus) à 4 (inclus), J va de 1 (exclu) à 7 (inclus).
— La partie commune commence en 1 : comme $1 \notin J$, la borne reste ouverte. Elle s'arrête en 4, qui appartient aux deux. Donc $I \cap J =]1\,;4]$.
— La réunion part de la plus petite borne, -3 (inclus), et va jusqu'à 7 (inclus). Les deux intervalles se chevauchent entre 1 et 4 : il n'y a pas de trou, on obtient un seul intervalle $I \cup J = [-3\,;7]$.

Réponse. $I \cap J =]1\,;4]$ et $I \cup J = [-3\,;7]$.

Correction de l'exercice 4 – Distance sur la droite des réels

Formule du cours : pour deux réels a et b,

$$|a-b| = \text{distance entre } a \text{ et } b$$

et la valeur absolue d'un nombre est ce nombre privé de son signe.

— $|-7-2| = |-9| = 9$: les points d'abscisses -7 et 2 sont à la distance 9.
— $|5-5| = |0| = 0$: la distance d'un point à lui-même est nulle.
— $|3-8| = |-5| = 5$: la distance entre 3 et 8 vaut 5. On remarque que $|8-3| = 5$ aussi : la distance ne dépend pas de l'ordre.

Réponse. 9 ; 0 ; 5.

Correction de l'exercice 5 – De la valeur absolue à l'intervalle

On utilise l'équivalence du cours :

$$|x-a| \leq r \Leftrightarrow a-r \leq x \leq a+r \Leftrightarrow x \in [a-r\,;a+r]$$

— Pour $|x-3| \leq 2$: on lit $a = 3$ (le centre) et $r = 2$ (le rayon). Les solutions sont les réels dont la distance à 3 est au plus 2, donc $x \in [3-2\,;3+2] = [1\,;5]$.
— Pour $|x+1| < 4$, on écrit d'abord $x+1 = x-(-1)$, donc $|x-(-1)| < 4$: le centre est -1 et le rayon 4. L'inégalité est **stricte**, les bornes sont donc exclues : $x \in]-5\,;3[$.

Réponse. $[1\,;5]$ puis $]-5\,;3[$.

Correction de l'exercice 6 – Équation avec valeur absolue

Propriété du cours : pour $r \geq 0$, $|A| = r$ signifie $A = r$ **ou** $A = -r$ (deux points sont à la distance r d'un même centre).

— Premier cas : $x+1 = 4$, donc $x = 3$.
— Second cas : $x+1 = -4$, donc $x = -5$.
— Vérification : $|3+1| = 4$ et $|-5+1| = |-4| = 4$. Les deux valeurs conviennent.

Piège. Une valeur absolue n'est jamais négative : l'équation $|x+1| = -4$ n'aurait aucune solution.

Réponse. $S = \{-5\,;3\}$.

Correction de l'exercice 7 – Fractions et priorités opératoires

Règle du cours : la multiplication se calcule **avant** l'addition.

— On commence par le produit : $\dfrac{3}{4} \times \dfrac{8}{9} = \dfrac{3 \times 8}{4 \times 9} = \dfrac{24}{36}$.
— On simplifie par 12 : $\dfrac{24}{36} = \dfrac{2}{3}$.
— On additionne ensuite les deux fractions, qui ont déjà le même dénominateur :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$A = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

— 4 et 3 n'ont pas de diviseur commun autre que 1 : la fraction est irréductible.

Réponse. $A = \frac{4}{3}$.

Correction de l'exercice 8 – Puissances et écriture scientifique

Formules du cours : $a^m \times a^n = a^{m+n}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ et $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

— Au numérateur : $2^5 \times 2^{-3} = 2^{5-3} = 2^2$.

— Puis la division : $B = \frac{2^2}{2^4} = 2^{2-4} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$.

— Pour C, on regroupe les nombres d'un côté, les puissances de 10 de l'autre :

$$C = (3 \times 5) \times (10^{-2} \times 10^5) = 15 \times 10^3$$

— L'écriture scientifique demande un nombre entre 1 et 10 : $15 = 1{,}5 \times 10$, donc $C = 1{,}5 \times 10^4$.

Réponse. $B = \frac{1}{4}$ et $C = 1{,}5 \times 10^4$.

Correction de l'exercice 9 – Calcul avec des racines carrées

Formules du cours : $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$ (pour $a \geq 0$) et $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

— On fait apparaître des carrés parfaits : $50 = 25 \times 2$ et $18 = 9 \times 2$.

— Donc $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$ et $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$.

— On peut alors additionner, car tous les termes contiennent le même $\sqrt{2}$:

$$D = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

— Pour E : $\sqrt{12} \times \sqrt{3} = \sqrt{12 \times 3} = \sqrt{36} = 6$.

Piège. $\sqrt{50}$ ne vaut pas $\sqrt{25} + \sqrt{2}$: la racine carrée ne se distribue pas sur une somme.

Réponse. $D = 5\sqrt{2}$ et $E = 6$.

Correction de l'exercice 10 – Quotient en écriture scientifique

Rappel du cours : l'écriture scientifique est de la forme $a \times 10^n$ avec $1 \leq |a| < 10$.

— 0,000 42 : on déplace la virgule de 4 rangs vers la droite, donc $0{,}000\,42 = 4{,}2 \times 10^{-4}$.

— 78 300 : la virgule recule de 4 rangs, donc $78\,300 = 7{,}83 \times 10^4$.

— Pour F, on sépare les nombres et les puissances de 10 :

$$F = \frac{4{,}2}{2} \times \frac{10^{-4}}{10^{-6}} = 2{,}1 \times 10^{-4-(-6)} = 2{,}1 \times 10^2$$

— Soit $F = 210$.

Réponse. $4{,}2 \times 10^{-4}$; $7{,}83 \times 10^4$; $F = 2{,}1 \times 10^2 = 210$.

Correction de l'exercice 11 – Encadrement d'une aire

Une mesure donnée à 0,05 près signifie que la valeur exacte est dans un intervalle de centre la mesure et de rayon 0,05 : on utilise $|x - a| \leq r \Leftrightarrow x \in [a - r\,;\, a + r]$.

— Longueur : $L \in [12{,}4 - 0{,}05\,;\, 12{,}4 + 0{,}05] = [12{,}35\,;\, 12{,}45]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Largeur : $\ell \in [7{,}8 - 0{,}05\,;\,7{,}8 + 0{,}05] = [7{,}75\,;\,7{,}85]$.
— L'aire $A = L \times \ell$ est d'autant plus grande que L et ℓ sont grands : on multiplie donc les bornes entre elles (toutes positives).
— Borne inférieure : $12{,}35 \times 7{,}75 = 95{,}712\,5$.
— Borne supérieure : $12{,}45 \times 7{,}85 = 97{,}732\,5$.

$$95{,}712\,5 \leq A \leq 97{,}732\,5$$

— Avec les mesures annoncées, $A \approx 12{,}4 \times 7{,}8 = 96{,}72$, soit 96,7 cm² au dixième près : l'encadrement montre que le chiffre des unités lui-même n'est pas certain.

Réponse. $95{,}712\,5 \leq A \leq 97{,}732\,5$ (en cm²) et $A \approx 96{,}7$ cm².

Correction de l'exercice 12 – Décimal ou non décimal

Un nombre est décimal s'il peut s'écrire $\dfrac{a}{10^n}$ avec a entier et n entier naturel.

Pour $\dfrac{7}{20}$, on multiplie numérateur et dénominateur par 5 pour obtenir une puissance de 10 au dénominateur :

$$\frac{7}{20} = \frac{7 \times 5}{20 \times 5} = \frac{35}{100} = 0{,}35$$

C'est un nombre décimal.

Pour $\dfrac{1}{3}$, on raisonne par l'absurde : si $\dfrac{1}{3} = \dfrac{a}{10^n}$, alors $10^n = 3a$, donc 10^n serait un multiple de 3. Or la somme des chiffres de 10^n (un 1 suivi de zéros) vaut 1, qui n'est pas un multiple de 3. C'est impossible : $\dfrac{1}{3}$ n'est pas décimal.

Réponse. $\dfrac{7}{20} = \dfrac{35}{100} = 0{,}35$ est décimal ; $\dfrac{1}{3}$ ne l'est pas.

Correction de l'exercice 13 – Hausse puis baisse

Une hausse de 10 % multiplie le prix par 1,10, une baisse de 10 % par 0,90. Deux évolutions successives correspondent au **produit** des coefficients :

$$1{,}10 \times 0{,}90 = 0{,}99$$

Le prix final vaut 0,99 fois le prix de départ : il ne revient pas à sa valeur initiale, il **baisse** de 1 %.

Exemple : 100 € deviennent 110 €, puis $110 \times 0{,}90 = 99$ €. La baisse de 10 % porte sur 110 €, une base plus grande que celle de la hausse : c'est pourquoi elle l'emporte.

Réponse. Non : coefficient global 0,99, soit une baisse de 1 %.

Correction de l'exercice 14 – Supprimer une racine au dénominateur

Pour A, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{3}$, ce qui ne change pas le quotient, et l'on utilise $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$:

$$A = \frac{6 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

Pour B, on utilise la propriété du quotient, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ pour $a \geq 0$ et $b > 0$:

$B = \sqrt{\dfrac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2$.

Contrôle : $\dfrac{6}{1{,}732} \approx 3{,}464$ et $2\sqrt{3} \approx 3{,}464$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $A = 2\sqrt{3}$ et $B = 2$.

Correction de l'exercice 15 – Vrai ou faux, avec justification

a) **Faux.** $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire $\dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers : c'est un nombre irrationnel. Il appartient à $\mathbb{R}$ mais pas à $\mathbb{Q}$.

b) **Faux.** L'égalité $|x| = x$ n'est vraie que pour $x \geq 0$. Contre-exemple : pour $x = -3$, $|-3| = 3 \neq -3$. La règle du cours est $|x| = -x$ lorsque $x \leq 0$.

c) **Vrai.** Le premier intervalle s'arrête à 5 inclus, le second commence après 5 exclu : aucun réel n'appartient aux deux, l'intersection est vide.

d) **Faux.** Un exposant négatif donne un inverse, pas un opposé : $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$.

Réponse. a) faux · b) faux · c) vrai · d) faux, $2^{-3} = \dfrac{1}{8}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).