

Plaquette 1 - Intervalles, valeur absolue et calcul exact

Nombres et calculs — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules et méthodes pour les nombres et le calcul exact.

- Ensembles de nombres emboîtés : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Un nombre est dans $\mathbb{Q}$ s'il s'écrit $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$.
- Intervalles : $[a; b]$ contient a et b , $]a; b[$ ne les contient pas ; $[a; +\infty[$ signifie $x \geq a$.
- Valeur absolue et distance : $|a - b|$ est la **distance** entre a et b sur la droite des réels, et

$$|x - a| \leq r \Leftrightarrow x \in [a - r; a + r]$$

- Puissances : $a^m \times a^n = a^{m+n}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
- Racines carrées : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$ pour $a \geq 0$, et $\sqrt{a^2} = |a|$.
- Écriture scientifique : $a \times 10^n$ avec $1 \leq |a| < 10$.

Correction de l'exercice 1 - Reconnaître un ensemble de nombres

On utilise les inclusions du cours : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, et le fait qu'un nombre rationnel est un quotient de deux entiers.

- -7 est un entier négatif : $-7 \in \mathbb{Z}$ (pas dans $\mathbb{N}$, qui ne contient que les entiers positifs).
- $\frac{4}{2} = 2$: c'est un entier naturel, donc $\frac{4}{2} \in \mathbb{N}$. Il faut simplifier avant de conclure.
- $\frac{2}{3}$ n'est pas un entier (le quotient ne se simplifie pas) : $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$.
- $\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 9$: donc $\sqrt{9} \in \mathbb{N}$.
- $\sqrt{2}$ n'est le quotient d'aucun couple d'entiers : $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ seulement (c'est un irrationnel).
- $-3,5 = -\frac{7}{2}$: c'est un quotient d'entiers, donc $-3,5 \in \mathbb{Q}$.

Réponse. $-7 \in \mathbb{Z}$; $\frac{4}{2} \in \mathbb{N}$; $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{9} \in \mathbb{N}$; $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$; $-3,5 \in \mathbb{Q}$.

Correction de l'exercice 2 - Traduire une inégalité par un intervalle

Règle du cours : un crochet **fermé** $[$ ou $]$ tourné vers l'intérieur signifie que la borne est atteinte ($\leq$ ou $\geq$), un crochet **ouvert** qu'elle ne l'est pas ($<$ ou $>$). L'infini n'étant pas un nombre, le crochet est toujours ouvert de son côté.

- $x \geq -2$ donne $x \in [-2; +\infty[$.
- $-1 < x \leq 5$ donne $x \in]-1; 5]$: ouvert en -1 , fermé en 5 .
- $x < 3$ donne $x \in]-\infty; 3[$.
- Tous les réels : $x \in]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$.

Réponse. a) $[-2; +\infty[$ · b) $] -1; 5]$ · c) $] -\infty; 3[$ · d) $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3 - Intersection et réunion d'intervalles

Méthode du cours : on place les deux intervalles sur une même droite graduée, puis on lit la partie **commune** pour $\cap$ et la partie **totale** pour $\cup$.

- I va de -3 (inclus) à 4 (inclus), J va de 1 (exclu) à 7 (inclus).
- La partie commune commence en 1 : comme $1 \notin J$, la borne reste ouverte. Elle s'arrête en 4 , qui appartient aux deux. Donc $I \cap J =]1 ; 4]$.
- La réunion part de la plus petite borne, -3 (inclus), et va jusqu'à 7 (inclus). Les deux intervalles se chevauchent entre 1 et 4 : il n'y a pas de trou, on obtient un seul intervalle $I \cup J = [-3 ; 7]$.

Réponse. $I \cap J =]1 ; 4]$ et $I \cup J = [-3 ; 7]$.

Correction de l'exercice 4 - Distance sur la droite des réels

Formule du cours : pour deux réels a et b ,

$$|a - b| = \text{distance entre } a \text{ et } b$$

et la valeur absolue d'un nombre est ce nombre privé de son signe.

- $|-7 - 2| = |-9| = 9$: les points d'abscisses -7 et 2 sont à la distance 9 .
- $|5 - 5| = |0| = 0$: la distance d'un point à lui-même est nulle.
- $|3 - 8| = |-5| = 5$: la distance entre 3 et 8 vaut 5 . On remarque que $|8 - 3| = 5$ aussi : la distance ne dépend pas de l'ordre.

Réponse. $9 ; 0 ; 5$.

Correction de l'exercice 5 - De la valeur absolue à l'intervalle

On utilise l'équivalence du cours :

$$|x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r \Leftrightarrow x \in [a - r ; a + r]$$

- Pour $|x - 3| \leq 2$: on lit $a = 3$ (le centre) et $r = 2$ (le rayon). Les solutions sont les réels dont la distance à 3 est au plus 2 , donc $x \in [3 - 2 ; 3 + 2] = [1 ; 5]$.
- Pour $|x + 1| < 4$, on écrit d'abord $x + 1 = x - (-1)$, donc $|x - (-1)| < 4$: le centre est -1 et le rayon 4 . L'inégalité est **stricte**, les bornes sont donc exclues : $x \in]-5 ; 3[$.

Réponse. $[1 ; 5]$ puis $] - 5 ; 3[$.

Correction de l'exercice 6 - Équation avec valeur absolue

Propriété du cours : pour $r \geq 0$, $|A| = r$ signifie $A = r$ **ou** $A = -r$ (deux points sont à la distance r d'un même centre).

- Premier cas : $x + 1 = 4$, donc $x = 3$.
- Second cas : $x + 1 = -4$, donc $x = -5$.
- Vérification : $|3 + 1| = 4$ et $|-5 + 1| = |-4| = 4$. Les deux valeurs conviennent.

Piège. Une valeur absolue n'est jamais négative : l'équation $|x + 1| = -4$ n'aurait aucune solution.

Réponse. $S = \{-5 ; 3\}$.

Correction de l'exercice 7 - Fractions et priorités opératoires

Règle du cours : la multiplication se calcule **avant** l'addition.

- On commence par le produit : $\frac{3}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{3 \times 8}{4 \times 9} = \frac{24}{36}$.
- On simplifie par 12 : $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.
- On additionne ensuite les deux fractions, qui ont déjà le même dénominateur :

$$A = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

— 4 et 3 n'ont pas de diviseur commun autre que 1 : la fraction est irréductible.

Réponse. $A = \frac{4}{3}$.

Correction de l'exercice 8 - Puissances et écriture scientifique

Formules du cours : $a^m \times a^n = a^{m+n}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ et $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

— Au numérateur : $2^5 \times 2^{-3} = 2^{5-3} = 2^2$.

— Puis la division : $B = \frac{2^2}{2^4} = 2^{2-4} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$.

— Pour C , on regroupe les nombres d'un côté, les puissances de 10 de l'autre :

$$C = (3 \times 5) \times (10^{-2} \times 10^5) = 15 \times 10^3$$

— L'écriture scientifique demande un nombre entre 1 et 10 : $15 = 1,5 \times 10$, donc $C = 1,5 \times 10^4$.

Réponse. $B = \frac{1}{4}$ et $C = 1,5 \times 10^4$.

Correction de l'exercice 9 - Calcul avec des racines carrées

Formules du cours : $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$ (pour $a \geq 0$) et $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

— On fait apparaître des carrés parfaits : $50 = 25 \times 2$ et $18 = 9 \times 2$.

— Donc $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$ et $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$.

— On peut alors additionner, car tous les termes contiennent le même $\sqrt{2}$:

$$D = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

— Pour E : $\sqrt{12} \times \sqrt{3} = \sqrt{12 \times 3} = \sqrt{36} = 6$.

Piège. $\sqrt{50}$ ne vaut pas $\sqrt{25} + \sqrt{2}$: la racine carrée ne se distribue pas sur une somme.

Réponse. $D = 5\sqrt{2}$ et $E = 6$.

Correction de l'exercice 10 - Quotient en écriture scientifique

Rappel du cours : l'écriture scientifique est de la forme $a \times 10^n$ avec $1 \leq |a| < 10$.

— 0,000 42 : on déplace la virgule de 4 rangs vers la droite, donc $0,000 42 = 4,2 \times 10^{-4}$.

— 78 300 : la virgule recule de 4 rangs, donc $78 300 = 7,83 \times 10^4$.

— Pour F , on sépare les nombres et les puissances de 10 :

$$F = \frac{4,2}{2} \times \frac{10^{-4}}{10^{-6}} = 2,1 \times 10^{-4 - (-6)} = 2,1 \times 10^2$$

— Soit $F = 210$.

Réponse. $4,2 \times 10^{-4}$; $7,83 \times 10^4$; $F = 2,1 \times 10^2 = 210$.

Correction de l'exercice 11 - Encadrement d'une aire

Une mesure donnée à 0,05 près signifie que la valeur exacte est dans un intervalle de centre la mesure et de rayon 0,05 : on utilise $|x - a| \leq r \Leftrightarrow x \in [a - r; a + r]$.

— Longueur : $L \in [12,4 - 0,05; 12,4 + 0,05] = [12,35; 12,45]$.

- Largeur : $\ell \in [7,8 - 0,05 ; 7,8 + 0,05] = [7,75 ; 7,85]$.
- L'aire $A = L \times \ell$ est d'autant plus grande que L et ℓ sont grands : on multiplie donc les bornes entre elles (toutes positives).
- Borne inférieure : $12,35 \times 7,75 = 95,7125$.
- Borne supérieure : $12,45 \times 7,85 = 97,7325$.

$$95,7125 \leq A \leq 97,7325$$

- Avec les mesures annoncées, $A \approx 12,4 \times 7,8 = 96,72$, soit $96,7 \text{ cm}^2$ au dixième près : l'encadrement montre que le chiffre des unités lui-même n'est pas certain.

Réponse. $95,7125 \leq A \leq 97,7325$ (en cm^2) et $A \approx 96,7 \text{ cm}^2$.

Correction de l'exercice 12 - Vrai ou faux, avec justification

- a) **Faux.** $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire $\frac{p}{q}$ avec p et q entiers : c'est un nombre irrationnel. Il appartient à $\mathbb{R}$ mais pas à $\mathbb{Q}$.
- b) **Faux.** L'égalité $|x| = x$ n'est vraie que pour $x \geq 0$. Contre-exemple : pour $x = -3$, $|-3| = 3 \neq -3$. La règle du cours est $|x| = -x$ lorsque $x \leq 0$.
- c) **Vrai.** Le premier intervalle s'arrête à 5 inclus, le second commence après 5 exclu : aucun réel n'appartient aux deux, l'intersection est vide.
- d) **Faux.** Un exposant négatif donne un inverse, pas un opposé : $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

Réponse. a) faux · b) faux · c) vrai · d) faux, $2^{-3} = \frac{1}{8}$.