MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Seconde

Multiples et diviseurs • Pair, impair • Fractions irréductibles
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ • Intervalles • Valeur absolue • Encadrements • Puissances

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de mathématiques de seconde générale et technologique** (arrêté du 26 février 2026, BO n°14 du 2 avril 2026, rentrée 2026), parties « Arithmétique » et « Nombres réels », ainsi que les règles sur les puissances de la partie « Algèbre ». Il couvre :

- notations $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$; multiple, diviseur, nombre pair, nombre impair ; fractions irréductibles ;
- ensembles $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$; nombres irrationnels ; droite numérique ;
- intervalles, valeur absolue comme distance, inéquation $|x - a| \leq r$;
- encadrement décimal d'amplitude donnée, arrondis et chiffres significatifs ;
- **démonstrations** au programme : la somme de deux multiples de a est un multiple de a ; le carré d'un nombre impair est impair ; $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal ; $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Objectif : connaître les ensembles de nombres, raisonner sur les multiples et les diviseurs, et décrire des ensembles de réels par des intervalles et des distances.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Table des matières

1 Entiers : multiples et diviseurs **3**
1.1 Entiers naturels et relatifs 3
1.2 Multiples, diviseurs, parité 3
1.3 Fractions irréductibles 4
1.4 Algorithmes 4

2 Les ensembles de nombres **4**

3 Intervalles de $\mathbb{R}$ **6**

4 Valeur absolue et distance **7**

5 Encadrements, arrondis, ordres de grandeur **7**

6 Puissances **8**

7 Fiche de synthèse **9**

8 Exercices d'application **9**

9 Corrigés des exercices **9**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Entiers : multiples et diviseurs

1.1. Entiers naturels et relatifs

Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

— $\mathbb{N} = \{0\,;1\,;2\,;3\,;\ldots\}$ est l'ensemble des **entiers naturels**.

— $\mathbb{Z} = \{\ldots\,;-2\,;-1\,;0\,;1\,;2\,;\ldots\}$ est l'ensemble des **entiers relatifs**.

On écrit $5 \in \mathbb{N}$ (« 5 appartient à $\mathbb{N}$ »), $-3 \notin \mathbb{N}$, $-3 \in \mathbb{Z}$, et $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (« $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$ »).

1.2. Multiples, diviseurs, parité

Multiple, diviseur

Soit a et b deux entiers relatifs. On dit que a est un **multiple** de b s'il existe un entier k tel que

$$a = kb.$$

On dit alors aussi que b est un **diviseur** de a, ou que b divise a.

Exemples

$42 = 6 \times 7$: 42 est un multiple de 7 et 7 est un diviseur de 42. $-15 = (-5) \times 3$: -15 est un multiple de 3. $0 = 0 \times b$: 0 est multiple de tout entier.

Nombres pairs et impairs

Un entier n est **pair** s'il est multiple de 2 : il existe un entier k tel que $n = 2k$. Il est **impair** sinon ; on peut alors l'écrire $n = 2k + 1$ avec k entier.

Somme de deux multiples

Soit a un entier. La somme de deux multiples de a est un multiple de a.

Démonstration. Soit m et n deux multiples de a : il existe des entiers k et k' tels que $m = ka$ et $n = k'a$. Alors

$$m + n = ka + k'a = (k + k')a,$$

et $k + k'$ est un entier : $m + n$ est un multiple de a.

Carré d'un nombre impair

Le carré d'un nombre impair est impair.

Démonstration. Soit n impair : $n = 2k + 1$ avec k entier. Alors

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

et $2k^2 + 2k$ est un entier : n^2 est de la forme $2K + 1$, il est impair.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Conséquence utile

Par contraposée : si n^2 est pair, alors n est pair (sinon n serait impair et n^2 aussi). Ce résultat sert dans la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Raisonner sur la parité

La somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3. Trois entiers consécutifs s'écrivent n, $n+1$, $n+2$; leur somme vaut $3n+3 = 3(n+1)$, multiple de 3.
Le produit de deux entiers consécutifs est pair. Parmi n et $n+1$, l'un est pair (disjonction des cas) : si $n = 2k$, $n(n+1) = 2k(n+1)$; si $n = 2k+1$, $n+1 = 2(k+1)$ et $n(n+1) = 2n(k+1)$.

1.3. Fractions irréductibles

Fraction irréductible

Une fraction $\frac{a}{b}$ (a, b entiers, $b \neq 0$) est **irréductible** si a et b n'ont pas d'autre diviseur commun positif que 1.

Rendre une fraction irréductible

On divise numérateur et dénominateur par leurs diviseurs communs, par exemple en décomposant en produits de facteurs premiers :

$$\frac{84}{120} = \frac{2^2 \times 3 \times 7}{2^3 \times 3 \times 5} = \frac{7}{2 \times 5} = \frac{7}{10}.$$

1.4. Algorithmes

Tester si a est multiple de b ; plus grand multiple inférieur à un nombre

L'opérateur `%` donne le reste de la division euclidienne et `//` le quotient entier.

```
def est_multiple(a, b):
    return a % b == 0

def plus_grand_multiple(a, b):
    # plus grand multiple de a inferieur ou egal a b (a > 0)
    return (b // a) * a
```

`est_multiple(91, 7)` renvoie `True` car $91 = 13 \times 7$; `plus_grand_multiple(7, 100)` renvoie `98`.

2. Les ensembles de nombres

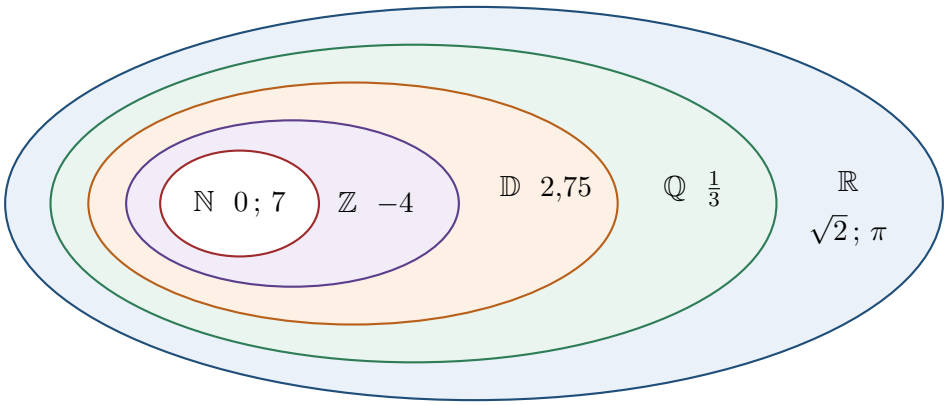
Décimaux, rationnels, réels

— Un nombre **décimal** s'écrit $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$: c'est un nombre dont l'écriture décimale est finie. Leur ensemble est $\mathbb{D}$.
— Un nombre **rationnel** s'écrit $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Leur ensemble est $\mathbb{Q}$.
— Les **réels** sont les abscisses des points d'une droite graduée (la droite numérique). Leur

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

ensemble est $\mathbb{R}$. Un réel qui n'est pas rationnel est dit **irrationnel**.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$



Ensembles emboîtés : chaque nombre est placé dans le plus petit ensemble qui le contient.

$\frac{1}{3}$ n'est pas décimal

Le rationnel $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Raisonnement par l'absurde. Supposons que $\frac{1}{3}$ soit décimal : $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$ avec a entier. Alors $10^n = 3a$: 10^n serait un multiple de 3. Or l'écriture de 10^n est un 1 suivi de n zéros : la somme de ses chiffres vaut 1, qui n'est pas multiple de 3, donc 10^n n'est pas multiple de 3. C'est contradictoire : $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

$\sqrt{2}$ est irrationnel

Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Raisonnement par l'absurde. Supposons $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers strictement positifs et la fraction **irréductible**. En élevant au carré, $p^2 = 2q^2$: p^2 est pair, donc p est pair (voir la remarque de la partie 1). Écrivons $p = 2k$: alors $4k^2 = 2q^2$, soit $q^2 = 2k^2$, donc q^2 est pair et q est pair. Ainsi p et q sont tous deux divisibles par 2, ce qui contredit l'irréductibilité de $\frac{p}{q}$. Donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exemples géométriques

La diagonale d'un carré de côté 1 mesure $\sqrt{2}$; le périmètre d'un cercle de diamètre 1 mesure π. Ces deux longueurs, très concrètes, sont irrationnelles : la géométrie a imposé l'existence des irrationnels bien avant que l'on sache les définir.

Classer un nombre

On cherche le plus petit ensemble qui le contient : est-il entier ? sinon, son écriture décimale est-elle finie ? sinon, est-il un quotient d'entiers ? sinon, il est irrationnel.

— $\dfrac{12}{4} = 3 \in \mathbb{N}$; $-\dfrac{9}{3} = -3 \in \mathbb{Z}$; $\dfrac{7}{4} = 1{,}75 \in \mathbb{D}$;

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $\frac{2}{7} \in \mathbb{Q}$ (écriture décimale infinie périodique) ; $\sqrt{16} = 4 \in \mathbb{N}$; $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Ce que l'on voit sur la calculatrice

La calculatrice affiche 0,3333333333 pour $\frac{1}{3}$: c'est une **valeur approchée**. Les calculatrices et les logiciels font des calculs approchés ; une égalité affichée n'est pas une preuve.

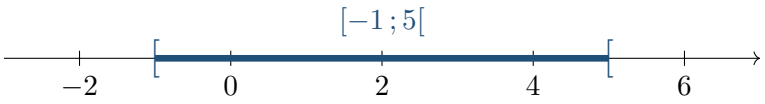
3. Intervalles de $\mathbb{R}$

Intervalles

Soit $a < b$ deux réels. Un intervalle est l'ensemble des réels x vérifiant une ou deux inégalités :

Inégalité(s)	Intervalle	Lecture
$a \leq x \leq b$	$[a\,;b]$	fermé
$a < x < b$	$]a\,;b[$	ouvert
$a \leq x < b$	$[a\,;b[$	fermé en a, ouvert en b
$x \geq a$	$[a\,;+\infty[$	
$x < b$	$]-\infty\,;b[$	

Du côté de $-\infty$ ou $+\infty$, le crochet est toujours **ouvert**. On note $\mathbb{R} =]-\infty\,;+\infty[$.



L'intervalle $[-1\,;5[$: -1 est inclus (crochet tourné vers l'intérieur), 5 est exclu.

Réunion, intersection

L'**intersection** $I \cap J$ est l'ensemble des réels appartenant à I **et** à J ; la **réunion** $I \cup J$, l'ensemble des réels appartenant à I **ou** à J (ou aux deux).

Avec $I = [-1\,;5[$ et $J =]2\,;8]$

$I \cap J =]2\,;5[$ et $I \cup J = [-1\,;8]$. Le nombre 5 est dans J mais pas dans I : il appartient à la réunion, pas à l'intersection.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

4. Valeur absolue et distance

Valeur absolue, distance

La **valeur absolue** d'un réel a, notée $|a|$, est sa distance à 0 sur la droite numérique :

$$|a| = a \text{ si } a \geq 0, \qquad |a| = -a \text{ si } a < 0.$$

La **distance** entre deux réels a et b est $|a-b| = |b-a|$.

Calculs

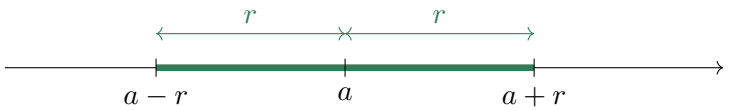
$|7| = 7$; $|-7| = 7$; $|3-8| = 5$: la distance entre 3 et 8 vaut 5 ; $|\pi - 4| = 4 - \pi$ car $\pi - 4 < 0$.

Intervalle de centre a et de rayon r

Pour $r > 0$:

$$|x-a| \leq r \iff a - r \leq x \leq a + r \iff x \in [a-r\,;a+r].$$

L'intervalle $[a-r\,;a+r]$ a pour centre a et pour rayon r (son amplitude vaut $2r$).



Passer d'une écriture à l'autre

- $|x-3| \leq 2 \iff x \in [1\,;5]$ (centre 3, rayon 2).
- $x \in [-4\,;10]$: centre $\frac{-4+10}{2} = 3$, rayon $\frac{10-(-4)}{2} = 7$, donc $|x-3| \leq 7$.
- $|x+2| \leq 0{,}5$: attention, $x + 2 = x - (-2)$, centre -2, donc $x \in [-2{,}5\,;-1{,}5]$.

Usage limité

Au programme de seconde, la valeur absolue sert à exprimer une **distance** et à décrire un intervalle de centre donné. C'est l'usage à maîtriser.

5. Encadrements, arrondis, ordres de grandeur

Encadrement décimal

Encadrer un réel x à 10^{-n} près, c'est trouver deux décimaux d et $d + 10^{-n}$ tels que $d \leq x \leq d + 10^{-n}$; l'**amplitude** de l'encadrement est 10^{-n}.

Encadrer $\sqrt{2}$

$1{,}4^2 = 1{,}96 < 2 < 1{,}5^2 = 2{,}25$, donc $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ (amplitude 10^{-1}) ; puis $1{,}41^2 = 1{,}9881 < 2 < 1{,}42^2 = 2{,}0164$, donc $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ (amplitude 10^{-2}).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Algorithme de balayage

```
def encadrement_racine2(n):
    pas = 10 ** (-n)
    x = 1
    while (x + pas) ** 2 < 2:
        x = x + pas
    return x, x + pas
```

Le programme avance de 10^{-n} en 10^{-n} tant que le carré reste inférieur à 2. (Les flottants introduisent de petites erreurs d'arrondi dans l'affichage.)

Arrondir avec un nombre adapté de chiffres significatifs

Les **chiffres significatifs** d'un nombre sont ses chiffres à partir du premier non nul. Dans un résultat issu de mesures, on garde autant de chiffres significatifs que la donnée la moins précise. Exemple : un rectangle de 2,4 m sur 3,15 m a une aire de 7,56 m^2 par le calcul, que l'on donne 7,6 m^2 (deux chiffres significatifs, comme 2,4).

6. Puissances

Règles de calcul

Pour a, b non nuls et n, p entiers relatifs :

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \qquad \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \qquad (a^n)^p = a^{np} \qquad (ab)^n = a^n b^n \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a^0 = 1.$$

Calculs et écriture scientifique

$\dfrac{2^5 \times 2^{-3}}{2^4} = 2^{5-3-4} = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}.$ $\quad (3 \times 10^4) \times (5 \times 10^{-7}) = 15 \times 10^{-3} = 1{,}5 \times 10^{-2}.$

L'**écriture scientifique** d'un décimal non nul est $a \times 10^n$ avec $1 \leq |a| < 10$ et n entier : elle donne immédiatement l'ordre de grandeur.

Erreurs fréquentes

$2^3 \times 3^2 \neq 6^5$ (les bases diffèrent) ; $(-2)^4 = 16$ mais $-2^4 = -16$; $10^{-3} = 0{,}001$ et non -1000 ; $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

7. Fiche de synthèse

Multiple	a multiple de b : $a = kb$, $k \in \mathbb{Z}$
Pair / impair	$n = 2k$ / $n = 2k+1$; carré d'un impair : impair
Ensembles	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
Décimal	$\frac{a}{10^n}$; $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$
Irrationnels	$\sqrt{2}$, π (preuve par l'absurde pour $\sqrt{2}$)
Intervalles	crochet ouvert du côté de l'infini
Distance	$\lvert a-b\rvert$; $\lvert x-a\rvert \leq r \iff x \in [a-r\,;a+r]$
Encadrement	amplitude 10^{-n} ; chiffres significatifs adaptés aux données
Puissances	$a^n a^p = a^{n+p}$, $(a^n)^p = a^{np}$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

8. Exercices d'application

Exercice 1 – Multiples et parité

1. Démontrer que la somme de deux nombres impairs est paire.
2. Démontrer que pour tout entier n, $n^2 + n$ est pair.
3. 1 001 est-il multiple de 7 ? de 11 ? de 13 ?

Exercice 2 – Classer des nombres

Donner le plus petit ensemble contenant chaque nombre : $\dfrac{35}{7}$; $-\dfrac{18}{4}$; $\dfrac{5}{6}$; $\sqrt{49}$; $\sqrt{50}$; $\dfrac{\pi}{\pi}$; $1{,}2 \times 10^{-3}$.

Exercice 3 – Intervalles et valeur absolue

1. Écrire sous forme d'intervalle : $-3 < x \leq 4$; $x \geq 2{,}5$; $\lvert x-1\rvert \leq 4$.
2. Déterminer $[-2\,;6] \cap]3\,;10[$ et $[-2\,;6] \cup]3\,;10[$.
3. Écrire $x \in [12\,;20]$ à l'aide d'une valeur absolue.

Exercice 4 – Fraction irréductible et puissances

Rendre irréductible $\dfrac{126}{210}$, puis calculer $A = \dfrac{6^3 \times 10^{-2}}{3^2 \times 2^4 \times 10^{-4}}$.

9. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé.

1. $(2k+1) + (2k'+1) = 2(k+k'+1)$: pair.
2. $n^2 + n = n(n+1)$ est le produit de deux entiers consécutifs, dont l'un est pair : il est pair.
3. $1\,001 = 7 \times 143 = 7 \times 11 \times 13$: c'est un multiple de 7, de 11 et de 13.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. $\frac{35}{7} = 5 \in \mathbb{N}$; $-\frac{18}{4} = -4{,}5 \in \mathbb{D}$; $\frac{5}{6} \in \mathbb{Q}$ (écriture décimale $0{,}8333\ldots$ infinie) ; $\sqrt{49} = 7 \in \mathbb{N}$; $\sqrt{50} = 5\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, irrationnel ; $\frac{\pi}{\pi} = 1 \in \mathbb{N}$; $1{,}2 \times 10^{-3} = 0{,}0012 \in \mathbb{D}$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé.

1. $]-3\,;4]$; $[2{,}5\,;+\infty[$; $[-3\,;5]$.
2. Intersection : $]3\,;6]$; réunion : $[-2\,;10[$.
3. Centre 16, rayon 4 : $|x-16| \leq 4$.

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. $126 = 2 \times 3^2 \times 7$ et $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$, donc $\dfrac{126}{210} = \dfrac{3}{5}$.

$6^3 = 2^3 \times 3^3$, donc $A = \dfrac{2^3 \times 3^3}{3^2 \times 2^4} \times 10^{-2-(-4)} = \dfrac{3}{2} \times 10^2 = 150$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).