

Plaquette 2 - Arbres pondérés : construire, lire, multiplier

Probabilités conditionnelles — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Arbres pondérés.

- Premier niveau : $P(A)$ et $P(\bar{A})$; second niveau, à partir de A : $P_A(B)$ et $P_A(\bar{B})$.
- Les branches issues d'un même nœud totalisent 1 : $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$.
- Probabilité d'un chemin (intersection) :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

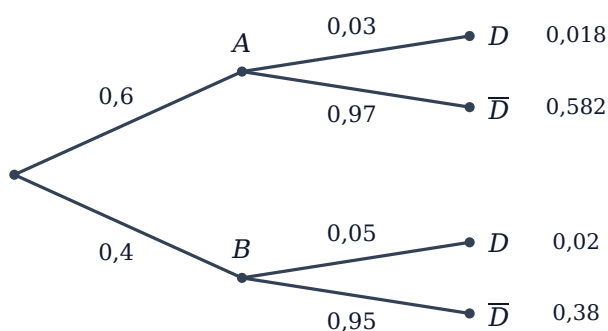
- Un événement réalisé par plusieurs chemins (incompatibles) : on additionne leurs probabilités, par exemple

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

- Conditionnement « à l'envers » : $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
- Contrôle : la somme de toutes les feuilles vaut 1.

Correction de l'exercice 1 - Deux machines

a) Premier niveau : la machine, $P(A) = 0,6$ et $P(B) = 0,4$. Second niveau : l'état de la pièce **sachant** la machine, $P_A(D) = 0,03$ et $P_B(D) = 0,05$; les branches complémentaires portent 0,97 et 0,95.



A, B : machine ; D : pièce défectueuse

b) On multiplie le long de chaque chemin :

$$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0,6 \times 0,03 = 0,018$$

et $P(B \cap D) = 0,4 \times 0,05 = 0,02$. Deux chemins mènent à D : $P(D) = 0,018 + 0,02 = 0,038$.

Contrôle. $0,018 + 0,582 + 0,02 + 0,38 = 1$.

Réponse. b) 0,018 ; 0,02 ; $P(D) = 0,038$.

Correction de l'exercice 2 - Compléter un arbre

Les branches issues d'un même nœud totalisent 1 :

$$P(\bar{A}) = 1 - 0,4 = 0,6 \quad P_A(\bar{B}) = 1 - 0,3 = 0,7 \quad P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - 0,1 = 0,9$$

Chemins (produits) :

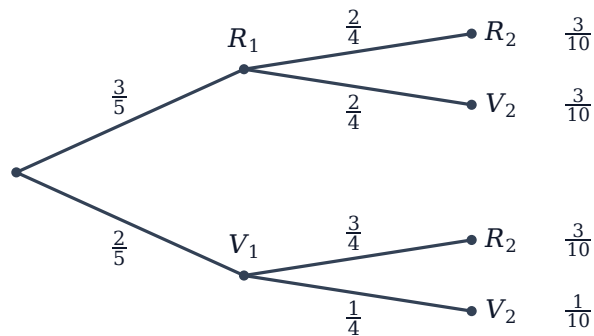
- $P(A \cap B) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$;
- $P(A \cap \bar{B}) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$;
- $P(\bar{A} \cap B) = 0,6 \times 0,1 = 0,06$;
- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,6 \times 0,9 = 0,54$.

Contrôle. $0,12 + 0,28 + 0,06 + 0,54 = 1$.

Réponse. $P(\bar{A}) = 0,6$; $0,7$; $0,9$; chemins $0,12$, $0,28$, $0,06$, $0,54$.

Correction de l'exercice 3 - Deux tirages sans remise

a) Après une rouge, il reste 2 rouges et 2 vertes ; après une verte, 3 rouges et 1 verte.



Sans remise : il reste 4 boules

b) Deux chemins : R_1R_2 et V_1V_2 .

$$P = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$$

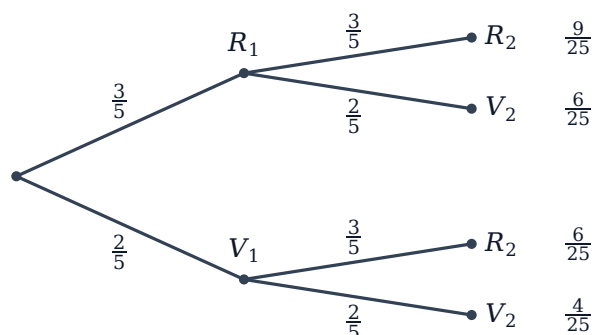
c) $P(R_2) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$ (deux chemins). Puis

$$P_{R_2}(R_1) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{3/10}{6/10} = \frac{1}{2}$$

Réponse. b) $\frac{2}{5}$ · c) $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 4 - Avec remise

a) Avec remise, le sac retrouve sa composition : au second tirage, la probabilité de rouge reste $\frac{3}{5}$, quel que soit le premier tirage.



Avec remise : la composition ne change pas

$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

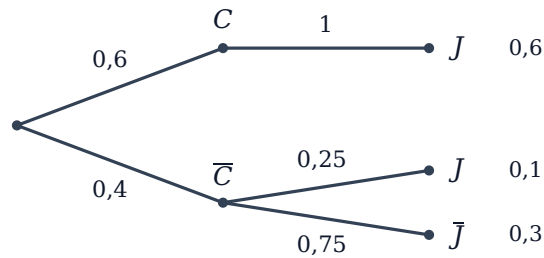
b) $P_{R_1}(R_2) = \frac{3}{5}$ (branche de l'arbre) et $P(R_2) = \frac{9}{25} + \frac{6}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$.

Les deux sont égales : avec remise, connaître la couleur de la première boule ne change pas la probabilité pour la seconde. Sans remise (exercice 3), $P_{R_1}(R_2) = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{5}$.

Réponse. a) $\frac{9}{25}$ · b) $P_{R_1}(R_2) = P(R_2) = \frac{3}{5}$.

Correction de l'exercice 5 - Répondre à un QCM

a) S'il connaît la réponse, il répond juste à coup sûr : $P_C(J) = 1$. Sinon, il choisit au hasard parmi 4 propositions : $P_{\bar{C}}(J) = \frac{1}{4} = 0,25$.



C : connaît la réponse ; J : répond juste

b) Deux chemins mènent à J :

$$P(J) = 0,6 \times 1 + 0,4 \times 0,25 = 0,6 + 0,1 = 0,7$$

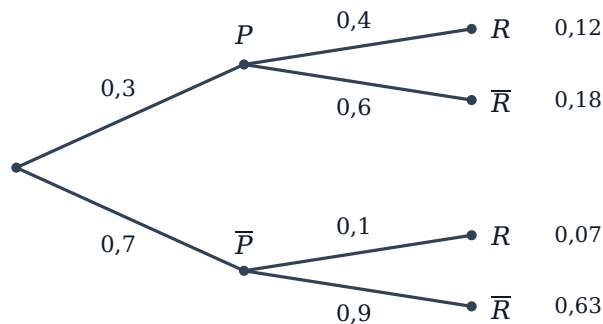
c) $P_J(C) = \frac{P(C \cap J)}{P(J)} = \frac{0,6}{0,7} = \frac{6}{7} \approx 0,857$.

Une bonne réponse ne prouve pas que l'élève savait : dans environ 14 % des cas, il a eu de la chance.

Réponse. b) $0,7$ · c) $\frac{6}{7} \approx 0,857$.

Correction de l'exercice 6 - Pluie et retard

a) Premier niveau : la pluie ; second niveau : le retard sachant le temps.



P : il pleut ; R : le bus est en retard

b) Deux chemins mènent à R :

$$P(R) = 0,3 \times 0,4 + 0,7 \times 0,1 = 0,12 + 0,07 = 0,19$$

c) On conditionne « à l'envers » :

$$P_R(P) = \frac{P(P \cap R)}{P(R)} = \frac{0,12}{0,19} \approx 0,632$$

Savoir que le bus est en retard fait passer la probabilité de pluie de 0,3 à environ 0,63.

Réponse. b) $0,19$ · c) environ 0,632.

Correction de l'exercice 7 - Lire un arbre

a) $P(A) = 0,7$: 70 % des clients sont des habitués. $P_A(B) = 0,2$: parmi les habitués, 20 % achètent un dessert. Le 0,2 est une probabilité **conditionnelle** : il porte sur les habitués, pas sur tous les clients.

b) Produits le long des chemins :

$$P(A \cap B) = 0,7 \times 0,2 = 0,14 \quad P(\bar{A} \cap B) = 0,3 \times 0,5 = 0,15$$

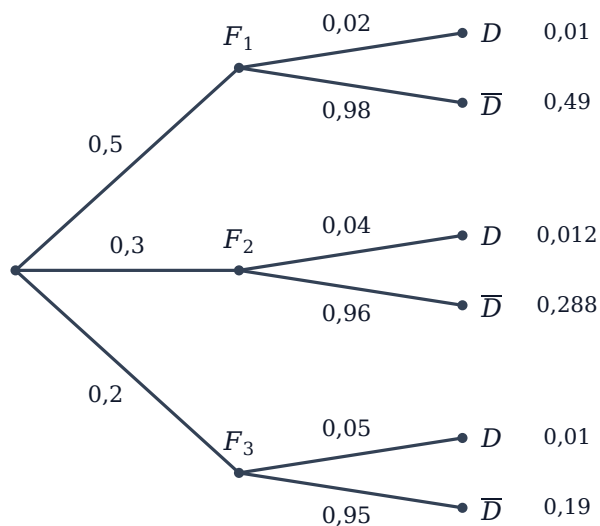
et $P(B) = 0,14 + 0,15 = 0,29$.

c) $P_B(A) = \frac{0,14}{0,29} \approx 0,483$: un peu moins de la moitié des acheteurs de dessert sont des habitués, alors que les habitués sont 70 % des clients.

Réponse. b) 0,14 ; 0,15 ; 0,29 · c) environ 0,483.

Correction de l'exercice 8 - Trois fournisseurs

a) Le premier niveau a trois branches ($0,5 + 0,3 + 0,2 = 1$).



Trois branches au premier niveau

Trois chemins mènent à D :

$$P(D) = 0,5 \times 0,02 + 0,3 \times 0,04 + 0,2 \times 0,05 = 0,01 + 0,012 + 0,01 = 0,032$$

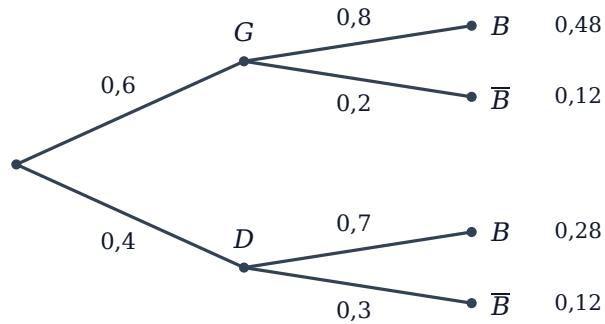
$$\text{b) } P_D(F_3) = \frac{P(F_3 \cap D)}{P(D)} = \frac{0,01}{0,032} = 0,3125.$$

F_3 ne fournit que 20 % des articles mais environ 31 % des articles défectueux.

Réponse. a) 0,032 · b) 0,3125.

Correction de l'exercice 9 – Tirs au but

On construit l'arbre : premier niveau, le côté ; second niveau, le but sachant le côté.



G, D : côté visé ; B : but marqué

a) Deux chemins mènent à B :

$$P(B) = 0,6 \times 0,8 + 0,4 \times 0,7 = 0,48 + 0,28 = 0,76$$

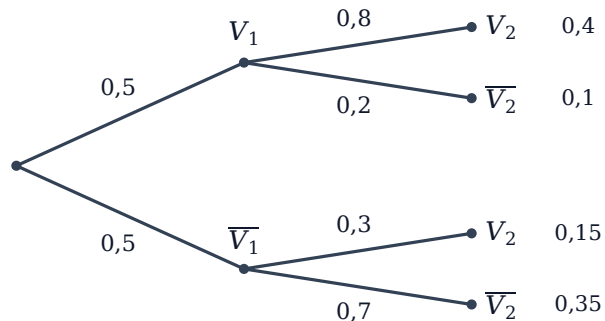
$$\text{b) } P_B(G) = \frac{P(G \cap B)}{P(B)} = \frac{0,48}{0,76} \approx 0,632.$$

Contrôle. $0,48 + 0,12 + 0,28 + 0,12 = 1.$

Réponse. a) $0,76$ · b) environ $0,632$.

Correction de l'exercice 10 – Deux feux tricolores

Les deux feux sont liés : on lit le second niveau comme des probabilités conditionnelles.



V1, V2 : le premier, le second feu est vert

$$\text{a) } P(V_1 \cap V_2) = 0,5 \times 0,8 = 0,4.$$

b) Deux chemins mènent à V_2 :

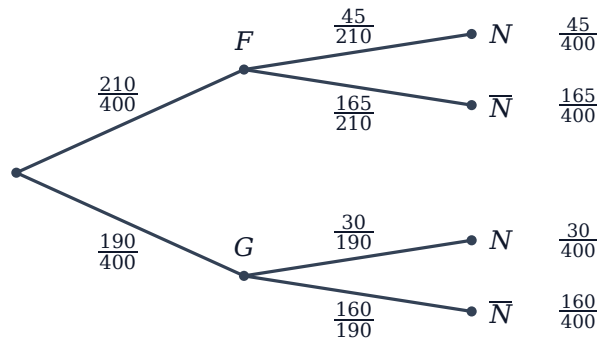
$$P(V_2) = 0,4 + 0,5 \times 0,3 = 0,4 + 0,15 = 0,55$$

$$\text{c) } P_{V_2}(V_1) = \frac{0,4}{0,55} \approx 0,727.$$

Réponse. a) $0,4$ · b) $0,55$ · c) environ $0,727$.

Correction de l'exercice 11 - Du tableau à l'arbre

Premier niveau : $P(F) = \frac{210}{400}$, $P(G) = \frac{190}{400}$. Second niveau : les fréquences conditionnelles $P_F(N) = \frac{45}{210}$ et $P_G(N) = \frac{30}{190}$.



F, G : fille, garçon ; N : natation

Chaque feuille redonne une case du tableau : par exemple $\frac{210}{400} \times \frac{45}{210} = \frac{45}{400}$. Par l'arbre (deux chemins) :

$$P(N) = \frac{45}{400} + \frac{30}{400} = \frac{75}{400} = 0,1875$$

Par le tableau, $P(N) = \frac{75}{400}$ directement : l'arbre et le tableau sont deux présentations des mêmes données.

Réponse. $P(N) = \frac{75}{400} = 0,1875$.

Correction de l'exercice 12 - De l'arbre au tableau

a) Effectifs : 2 500 juniors, dont $0,08 \times 2\,500 = 200$ blessés ; 7 500 seniors, dont $0,03 \times 7\,500 = 225$ blessés.

	Juniors	Seniors	Total
Blessés	200	225	425
Non blessés	2 300	7 275	9 575
Total	2 500	7 500	10 000

b) Référence : les 425 blessés.

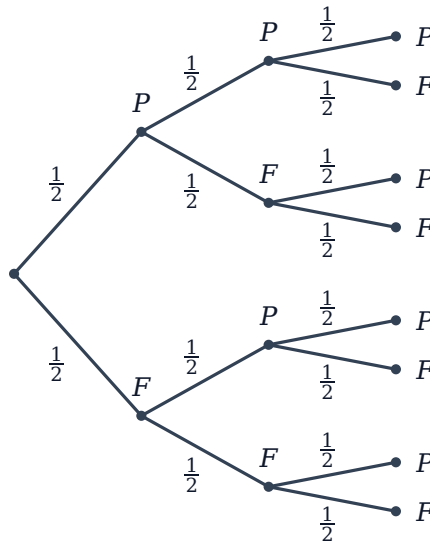
$$P_{\text{blessé}}(\text{junior}) = \frac{200}{425} \approx 0,471$$

Les juniors forment un quart du club mais près de la moitié des blessés. Le tableau évite de manipuler des décimaux trop petits.

Réponse. b) environ 0,471.

Correction de l'exercice 13 – Trois lancers d'une pièce

a) Chaque branche porte $\frac{1}{2}$; un chemin a trois branches :



Chaque chemin a la probabilité $1/8$

$$P(PPP) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

b) Exactement deux piles : PPF, PFP, FPP , trois chemins de probabilité $\frac{1}{8}$: $P = \frac{3}{8}$.

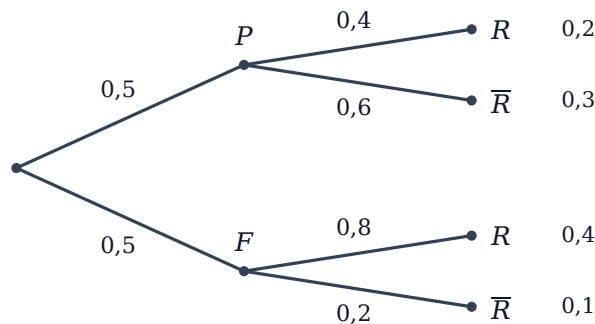
c) Sachant que le premier lancer donne pile, on regarde les 4 chemins qui commencent par P ; deux contiennent exactement deux piles (PPF et PFP) :

$$P_{P_1}(\text{deux piles}) = \frac{2/8}{4/8} = \frac{1}{2}$$

Réponse. a) $\frac{1}{8}$ · b) $\frac{3}{8}$ · c) $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 14 – Une pièce puis une urne

Dans l'urne 1, $P_P(R) = \frac{2}{5} = 0,4$; dans l'urne 2, $P_F(R) = \frac{4}{5} = 0,8$.



Pile : urne 1 ; face : urne 2 ; R : boule rouge

a) Deux chemins mènent à R :

$$P(R) = 0,5 \times 0,4 + 0,5 \times 0,8 = 0,2 + 0,4 = 0,6$$

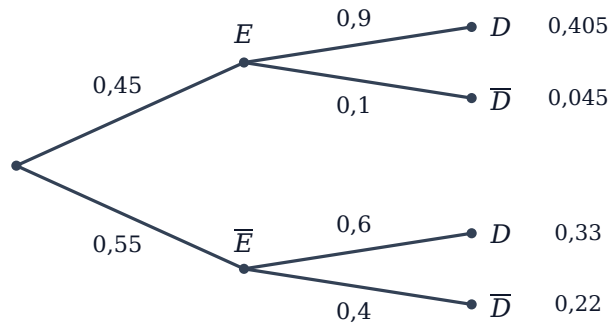
$$\text{b) } P_R(P) = \frac{P(P \cap R)}{P(R)} = \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3}.$$

Une boule rouge rend l'urne 2 plus probable : elle contient davantage de boules rouges.

Réponse. a) $0,6$ · b) $\frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 15 - Entrée et dessert

On construit l'arbre : $P(E) = 0,45$, $P_E(D) = 0,9$, $P_{\bar{E}}(D) = 0,6$.



E : entrée ; D : dessert

a) Deux chemins :

$$P(D) = 0,45 \times 0,9 + 0,55 \times 0,6 = 0,405 + 0,33 = 0,735$$

b) $P_D(E) = \frac{0,405}{0,735} \approx 0,551$.

c) « Ni entrée ni dessert » est le chemin $\bar{E} \cap \bar{D}$: $0,55 \times 0,4 = 0,22$.

Contrôle. $0,405 + 0,045 + 0,33 + 0,22 = 1$.

Réponse. a) $0,735$ · b) environ $0,551$ · c) $0,22$.