

Plaquette 4 - Langue naturelle, notations, modèle et loi des grands nombres

Probabilités conditionnelles — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Traduire et modéliser.

- « $x\%$ des individus sont A » : $P(A)$. « $x\%$ des individus sont A et B » : $P(A \cap B)$.
- « Parmi les A , $x\%$ sont B », « $x\%$ des A sont B », « sachant A » : $P_A(B)$.
- Lien entre les trois :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

- Un **modèle** probabiliste est une hypothèse : l'équiprobabilité ne se démontre pas.
- **Loi des grands nombres** (version vulgarisée) : quand n est grand, sauf exception, la fréquence observée d'un événement est proche de sa probabilité ; on peut alors prendre la fréquence observée comme modèle.
- Simulation en Python : `randint(a, b)` (module `random`) tire un entier au hasard entre a et b ; un compteur dans une boucle `for` calcule une fréquence.

Correction de l'exercice 1 - Traduire en notations

On repère la population de référence de chaque phrase.

- a) Tous les adhérents : $P(F) = 0,62$.
- b) Les femmes : $P_F(M) = 0,35$.
- c) Tous les adhérents, deux caractéristiques : $P(F \cap M) = 0,217$.
- d) Les personnes du matin : $P_M(\bar{F}) = 0,4$ (donc $P_M(F) = 0,6$).

Cohérence. D'après la relation

$$P(F \cap M) = P(F) \times P_F(M) = 0,62 \times 0,35 = 0,217$$

les phrases a), b) et c) sont cohérentes.

Réponse. a) $P(F) = 0,62$ · b) $P_F(M) = 0,35$ · c) $P(F \cap M) = 0,217$ · d) $P_M(\bar{F}) = 0,4$.

Correction de l'exercice 2 - Des notations aux phrases

a) Traductions :

- $P(I) = 0,15$: 15 % des élèves sont internes ;
- $P_I(S) = 0,6$: parmi les internes, 60 % pratiquent un sport en club ;
- $P_S(I) = 0,25$: parmi les sportifs, un sur quatre est interne ;
- $P(I \cap \bar{S}) = 0,06$: 6 % des élèves sont internes et ne pratiquent pas de sport en club.

b) Avec la relation $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$:

$$P(I \cap S) = 0,15 \times 0,6 = 0,09$$

Puis, de $P(I \cap S) = P(S) \times P_S(I)$: $P(S) = \frac{0,09}{0,25} = 0,36$. **Contrôle :**

$$P(I \cap S) + P(I \cap \bar{S}) = 0,09 + 0,06 = 0,15 = P(I).$$

Réponse. b) $P(I \cap S) = 0,09$; $P(S) = 0,36$.

Correction de l'exercice 3 - Ce dé est-il équilibré ?

On calcule les fréquences observées $f = \frac{\text{effectif}}{600}$ et on les compare à $\frac{1}{6} \approx 0,167$.

- Dé D1 : fréquences entre $\frac{95}{600} \approx 0,158$ et $\frac{105}{600} = 0,175$, toutes proches de $\frac{1}{6}$. Le modèle d'équiprobabilité est plausible.
- Dé D2 : la face 6 apparaît 180 fois.

$$f(6) = \frac{180}{600} = 0,3$$

C'est près du double de $\frac{1}{6}$; les autres faces apparaissent environ 85 fois sur 600, soit environ 0,14. D'après la loi des grands nombres, on choisit le modèle $P(6) = 0,3$ et $P(k) = 0,14$ pour les autres faces (total $0,3 + 5 \times 0,14 = 1$) : le dé D2 est truqué.

Réponse. D1 : équiprobabilité ; D2 : $P(6) \approx 0,3$ et environ 0,14 pour chaque autre face.

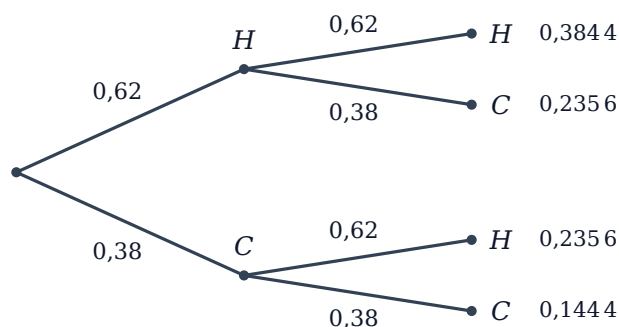
Correction de l'exercice 4 - Lancer de punaise

a) Une punaise n'est pas symétrique : rien ne justifie l'équiprobabilité. D'après la loi des grands nombres, la fréquence observée sur 1 000 lancers est proche de la probabilité :

$$P(H) \approx \frac{620}{1\,000} = 0,62$$

On choisit le modèle $P(H) = 0,62$ et $P(C) = 0,38$.

b) Le second lancer ne dépend pas du premier : les branches du second niveau portent encore 0,62 et 0,38.



H : pointe en l'air ; C : sur le côté

$$P(HH) = 0,62 \times 0,62 = 0,3844.$$

Réponse. a) $P(H) = 0,62$ · b) 0,3844.

Correction de l'exercice 5 - Observer la loi des grands nombres

a) La probabilité du résultat 6 est

$$P(6) = \frac{1}{6} \approx 0,1667$$

Plus n est grand, plus la fréquence observée s'en rapproche : l'écart vaut environ 0,13 pour $n = 10$, 0,005 pour $n = 1\,000$ et 0,0001 pour $n = 100\,000$. C'est la loi des grands nombres : pour n grand, sauf exception, la fréquence est proche de la probabilité.

b) Sur 10 lancers, obtenir trois 6 arrive souvent avec un dé équilibré : la fréquence fluctue beaucoup quand n est petit. La conclusion n'est pas justifiée ; il faudrait beaucoup plus de lancers.

Réponse. a) f se rapproche de $\frac{1}{6}$ quand n grandit · b) conclusion non justifiée.

Correction de l'exercice 6 - Simuler la somme de deux dés

a) À chaque tour de boucle, la fonction simule le lancer de deux dés et ajoute 1 au compteur si la somme vaut 7. Elle renvoie la **fréquence** des sommes égales à 7 sur n lancers.

b) Il y a 36 couples équiprobables ; la somme 7 est obtenue par (1 ; 6), (2 ; 5), (3 ; 4), (4 ; 3), (5 ; 2), (6 ; 1) :

$$P(\text{somme} = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0,167$$

D'après la loi des grands nombres, *frequence_sept(100000)* donne presque toujours une valeur très proche de 0,167 (le résultat change d'un appel à l'autre, car il est aléatoire).

Réponse. a) la fréquence des sommes 7 · b) $\frac{1}{6}$; environ 0,167.

Correction de l'exercice 7 - Simuler une probabilité conditionnelle

a) On numérote les boules : *randint(1, 5) <= 3* est vrai avec la probabilité $\frac{3}{5}$ (la première boule est rouge). Ensuite il reste 4 boules : 2 rouges si la première était rouge, 3 sinon. D'où les tests *<= 2* et *<= 3*.

b) La fonction compte, **parmi** les tirages où la seconde boule est rouge, ceux où la première l'était aussi : elle estime $P_{R_2}(R_1)$.

$$P_{R_2}(R_1) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)}$$

Avec l'arbre : $P(R_1 \cap R_2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$ et $P(R_2) = \frac{3}{10} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$, d'où $P_{R_2}(R_1) = \frac{1}{2}$. Une simulation de 100 000 tirages donne par exemple 0,501.

Réponse. b) $P_{R_2}(R_1) = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 8 - Garçon ou fille

a) Sur 205 naissances, environ 105 garçons : d'après la loi des grands nombres, on prend

$$P(G) = \frac{105}{205} \approx 0,512 \quad P(F) \approx 0,488$$

L'équiprobabilité (0,5 chacun) serait un modèle un peu moins fidèle.

b) Arbre à deux niveaux avec les mêmes probabilités sur chaque branche :

$$P(GG) \approx 0,512 \times 0,512 \approx 0,262$$

Avec le modèle d'équiprobabilité, on trouverait 0,25 : l'écart est faible mais réel.

Réponse. a) $P(G) \approx 0,512$ · b) environ 0,262.

Correction de l'exercice 9 - Une réciproque fausse

On calcule dans les bonnes sous-populations.

— Parmi les 100 personnes A : $P_A(B) = \frac{90}{100} = 0,9$.

— Les B sont $90 + 300 = 390$; parmi eux, 90 sont des A :

$$P_B(A) = \frac{90}{390} \approx 0,231$$

L'affirmation est fausse : ce contre-exemple montre que $P_A(B)$ et $P_B(A)$ peuvent être très différentes. Elles sont liées par $P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$, toutes deux égales à $P(A \cap B)$; elles ne sont égales que si $P(A) = P(B)$.

Réponse. $P_A(B) = 0,9$ mais $P_B(A) \approx 0,231$: affirmation fausse.

Correction de l'exercice 10 - Une pièce bien équilibrée ?

a) Fréquences :

$$f_{\text{Léo}} = \frac{60}{100} = 0,6 \quad f_{\text{Inès}} = \frac{5080}{10\,000} = 0,508$$

b) D'après la loi des grands nombres, c'est la fréquence calculée sur le plus grand nombre de lancers qui est la plus proche de la probabilité : le résultat d'Inès est le plus fiable.

Sur 100 lancers, obtenir 60 piles avec une pièce équilibrée n'a rien d'exceptionnel : la fréquence fluctue beaucoup. Sur 10 000 lancers, 0,508 est très proche de 0,5 : rien ne fait douter de l'équilibre de la pièce.

Réponse. a) 0,6 et 0,508 · b) celui d'Inès ; pas de raison de douter.

Correction de l'exercice 11 - Deux enfants

Avec l'équiprobabilité, on compte :

$$P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$$

a) « Au moins un garçon » = $\{GG; GF; FG\}$, soit 3 cas, dont un seul avec deux garçons :

$$P = \frac{1}{3}$$

b) « L'aîné est un garçon » = $\{GG; GF\}$, soit 2 cas, dont un avec deux garçons : $P = \frac{1}{2}$.

Les deux informations semblent proches mais ne réduisent pas l'univers de la même façon : c'est pourquoi on écrit toujours l'événement connu avant de calculer.

Réponse. a) $\frac{1}{3}$ · b) $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 12 - « Et » ou « sachant »

On note S : « en seconde » et B : « prend le bus ».

a) Intersection, rapportée à tous les élèves : $P(S \cap B) = \frac{90}{500} = 0,18$.

b) On se restreint aux 180 élèves de seconde :

$$P_S(B) = \frac{90}{180} = 0,5$$

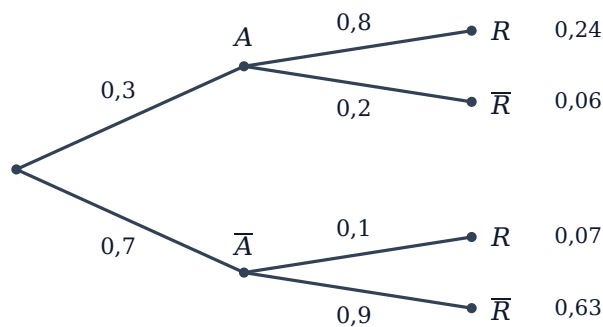
c) On se restreint aux 220 usagers du bus : $P_B(S) = \frac{90}{220} \approx 0,409$.

Les trois nombres ont le même numérateur (90) mais trois dénominateurs différents : 500, 180, 220.

Réponse. a) 0,18 · b) 0,5 · c) environ 0,409.

Correction de l'exercice 13 - Prévisions météo

a) $P(A) = 0,3$; $P_A(R) = 0,8$; $P_{\bar{A}}(R) = 0,1$.



A : pluie annoncée ; R : il pleut

b) Deux chemins mènent à R :

$$P(R) = 0,3 \times 0,8 + 0,7 \times 0,1 = 0,24 + 0,07 = 0,31$$

Puis $P_R(A) = \frac{0,24}{0,31} \approx 0,774$: environ 77 % des jours de pluie avaient été annoncés. Les deux indicateurs de qualité, $P_A(R) = 0,8$ et $P_R(A) \approx 0,77$, ne répondent pas à la même question.

Réponse. b) $P(R) = 0,31$; $P_R(A) \approx 0,774$.

Correction de l'exercice 14 - Une population de lycéens

Tirage équiprobable : on compte dans la bonne sous-population.

a) Parmi les 300 élèves de T, 60 font de l'anglais renforcé :

$$P_T(E) = \frac{60}{300} = 0,2$$

b) Les élèves sans anglais renforcé sont $1\,200 - 480 = 720$. Parmi eux, ceux de T : $300 - 60 = 240$.

$$P_{\bar{E}}(T) = \frac{240}{720} = \frac{1}{3}$$

Contrôle. $P(T) = \frac{300}{1\,200} = 0,25$: les élèves de T sont surreprésentés parmi ceux qui ne font pas d'anglais renforcé.

Réponse. a) $0,2$ · b) $\frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 15 - Estimer une probabilité inconnue

a) D'après la loi des grands nombres, avec $n = 5\,000$ lancers :

$$P(\text{premier}) \approx \frac{2\,180}{5\,000} = 0,436$$

(un dé équilibré donnerait $\frac{5}{12} \approx 0,417$).

b) On estime une probabilité conditionnelle par une fréquence conditionnelle, calculée parmi les 2 180 résultats premiers : $P_{\text{premier}}(2) \approx \frac{560}{2\,180} \approx 0,257$.

c) Une fréquence observée fluctue d'une série de lancers à l'autre ; elle n'est que **proche** de la probabilité, avec une précision d'autant meilleure que le nombre de lancers est

grand.

Réponse. a) environ 0,436 · b) environ 0,257.