

Plaquette 1 – Probabilité conditionnelle : définition et tableaux croisés

Probabilités conditionnelles — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Probabilité conditionnelle.

- Pour un événement A de probabilité non nulle :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- Tirage équiprobable (dé équilibré, individu choisi au hasard) :

$$P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$$

- Probabilité de l'intersection : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.
- Événement contraire : $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$.
- $P_A(B)$ et $P_B(A)$ sont **différentes** en général : l'événement connu n'est pas le même.
- Réunion : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Correction de l'exercice 1 – Un dé et une information

Le dé est équilibré : les six issues sont équiprobables, et l'on peut compter.

$$P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$$

a) A : « pair » = $\{2; 4; 6\}$ et B : « égal à 6 » = $\{6\}$. Donc $A \cap B = \{6\}$ et $P_A(B) = \frac{1}{3}$.

b) C : « au moins 4 » = $\{4; 5; 6\}$; parmi ces issues, les paires sont 4 et 6 : $P_C(A) = \frac{2}{3}$.

c) Sans information, $P(B) = \frac{1}{6}$ et $P(A) = \frac{1}{2}$. Savoir que le résultat est pair double la probabilité d'avoir 6 ; savoir qu'il est au moins 4 fait passer la probabilité « pair » de $\frac{1}{2}$ à $\frac{2}{3}$.

Réponse. a) $\frac{1}{3}$ · b) $\frac{2}{3}$ · c) au lieu de $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 2 – Rois et cœurs

Tirage au hasard : on compte les cartes.

$$P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$$

a) Il y a 4 rois sur 32 cartes : $P(R) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

— Parmi les 8 cœurs, un seul roi : $P_C(R) = \frac{1}{8}$.

— Parmi les 4 rois, un seul cœur : $P_R(C) = \frac{1}{4}$.

b) $P_C(R) = P(R) = \frac{1}{8}$: l'information « cœur » ne change pas la probabilité d'avoir un roi

(chaque couleur contient la même proportion de rois). En revanche $P_R(C) = \frac{1}{4} \neq P_C(R)$: les deux probabilités conditionnelles sont différentes.

Réponse. a) $P(R) = \frac{1}{8}$, $P_C(R) = \frac{1}{8}$, $P_R(C) = \frac{1}{4}$ · b) non.

Correction de l'exercice 3 - Tirer un élève au sort

Le tirage est équiprobable : chaque probabilité est une fréquence du tableau.

— $P(N) = \frac{75}{400} = 0,1875$ (fréquence marginale) ;

— $P(F \cap N) = \frac{45}{400} = 0,1125$ (fréquence d'une case) ;

— $P_F(N)$: on se place parmi les 210 filles,

$$P_F(N) = \frac{\text{Card}(F \cap N)}{\text{Card}(F)} = \frac{45}{210} \approx 0,214$$

— $P_N(F)$: on se place parmi les 75 nageurs, $P_N(F) = \frac{45}{75} = 0,6$.

Contrôle. $P(F) \times P_F(N) = \frac{210}{400} \times \frac{45}{210} = \frac{45}{400} = P(F \cap N)$.

Réponse. $P(N) = 0,1875$; $P(F \cap N) = 0,1125$; $P_F(N) \approx 0,214$; $P_N(F) = 0,6$.

Correction de l'exercice 4 - Appliquer la définition

a) Par définition de la probabilité conditionnelle :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25$$

b) Sachant A , les événements B et $\bar{B}$ se partagent toutes les issues :

$$P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - 0,25 = 0,75$$

c) $P_A(B) = 0,25$: parmi les clients de moins de 25 ans, un sur quatre paie par téléphone. (Et $P(A \cap B) = 0,1$: 10 % des clients ont moins de 25 ans **et** paient par téléphone.)

Réponse. a) 0,25 · b) 0,75.

Correction de l'exercice 5 - Probabilité d'une intersection

a) « 30 % des habitants ont un vélo » : $P(V) = 0,3$. « Parmi ceux qui ont un vélo, 60 % » : c'est une probabilité **conditionnelle**, $P_V(T) = 0,6$.

b) On cherche $P(V \cap T)$. De la définition $P_V(T) = \frac{P(V \cap T)}{P(V)}$ on tire :

$$P(V \cap T) = P(V) \times P_V(T) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$$

18 % des habitants vont travailler à vélo. C'est un pourcentage de pourcentage : 60 % de 30 %.

Réponse. a) $P(V) = 0,3$ et $P_V(T) = 0,6$ · b) 0,18.

Correction de l'exercice 6 - Retrouver une probabilité

On part de la relation entre intersection et probabilité conditionnelle :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

d'où

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P_A(B)} = \frac{0,12}{0,4} = 0,3$$

Puis $P_A(\bar{B}) = 1 - 0,4 = 0,6$ et $P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P_A(\bar{B}) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$.

Contrôle. $P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = 0,12 + 0,18 = 0,3 = P(A)$: les issues de A se partagent entre B et $\bar{B}$.

Réponse. $P(A) = 0,3$ et $P(A \cap \bar{B}) = 0,18$.

Correction de l'exercice 7 - Boules rouges et numéros pairs

Les 5 boules ont la même probabilité d'être tirées. On note R : « rouge » = $\{1; 2; 3\}$ et D : « numéro pair » = $\{2; 4\}$. Donc $R \cap D = \{2\}$.

$$P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$$

$$\text{a) } P_R(D) = \frac{\text{Card}(R \cap D)}{\text{Card}(R)} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{b) } P_D(R) = \frac{\text{Card}(R \cap D)}{\text{Card}(D)} = \frac{1}{2}.$$

Même numérateur (la boule 2), dénominateurs différents : 3 boules rouges, 2 boules paires.

Réponse. a) $\frac{1}{3}$ · b) $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 8 - Deux dés

Il y a $6 \times 6 = 36$ couples (rouge ; bleu) équiprobables.

a) Somme au moins 10 : (4 ; 6), (5 ; 5), (5 ; 6), (6 ; 4), (6 ; 5), (6 ; 6), soit 6 couples.

$$P(S) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

b) R contient 6 couples, (6 ; 1) à (6 ; 6) ; parmi eux, S est réalisé pour (6 ; 4), (6 ; 5), (6 ; 6) :

$$P_R(S) = \frac{\text{Card}(R \cap S)}{\text{Card}(R)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Parmi les 6 couples de S , 3 ont un 6 rouge : $P_S(R) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Savoir que le dé rouge donne 6 fait passer la probabilité de S de $\frac{1}{6}$ à $\frac{1}{2}$.

Réponse. a) $\frac{1}{6}$ · b) $P_R(S) = \frac{1}{2}$ et $P_S(R) = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 9 - Satisfaction des clients

Tirage au hasard : on lit les fréquences du tableau.

$$- P(M) = \frac{30}{300} = 0,1 ;$$

$$- P_L(M) = \frac{24}{180} \approx 0,133 ;$$

$$- P_L(M), \text{ parmi les 120 clients du magasin : } \frac{6}{120} = 0,05 ;$$

$$- P_M(L), \text{ parmi les 30 mécontents :}$$

$$P_M(L) = \frac{24}{30} = 0,8$$

Interprétation. Un client livré a une probabilité d'être mécontent environ 2,7 fois plus grande qu'un client du magasin (0,133 contre 0,05). Et un client mécontent a été livré

dans 80 % des cas.

Réponse. $P(M) = 0,1$; $P_L(M) \approx 0,133$; $P_{\bar{L}}(M) = 0,05$; $P_M(L) = 0,8$.

Correction de l'exercice 10 - Une classe

On complète mentalement le tableau : 12 garçons, dont $12 - 8 = 4$ demi-pensionnaires.

$$P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$$

a) $P_F(D) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9} \approx 0,444$; $P_D(F) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

b) Parmi les 12 garçons, 4 sont demi-pensionnaires : $P_{\bar{F}}(D) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Non : les filles sont plus souvent demi-pensionnaires ($\frac{4}{9} \approx 44\%$) que les garçons ($\frac{1}{3} \approx 33\%$).

Réponse. a) $\frac{4}{9}$ et $\frac{2}{3}$ · b) $\frac{1}{3}$; non.

Correction de l'exercice 11 - L'événement contraire

a) Sachant C (et de même sachant $\bar{C}$), T et $\bar{T}$ se partagent toutes les issues :

$$P_C(\bar{T}) = 1 - P_C(T) = 0,3 \quad P_{\bar{C}}(\bar{T}) = 1 - 0,2 = 0,8$$

b) Avec $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$:

— $P(C \cap T) = 0,25 \times 0,7 = 0,175$;

— $P(\bar{C}) = 1 - 0,25 = 0,75$, donc $P(\bar{C} \cap T) = 0,75 \times 0,2 = 0,15$.

Piège. $P_C(\bar{T})$ n'est pas $1 - P(T)$: on reste à l'intérieur des cadres.

Réponse. a) 0,3 et 0,8 · b) 0,175 et 0,15.

Correction de l'exercice 12 - Vrai ou faux

a) **Faux.** Avec un dé équilibré, A : « pair » = $\{2 ; 4 ; 6\}$ et B : « égal à 6 ». $P_A(B) = \frac{1}{3}$ mais $P_B(A) = 1$ (si l'on a 6, le résultat est pair).

b) **Vrai.** Sachant A , les issues se partagent entre B et $\bar{B}$:

$$P_A(B) + P_A(\bar{B}) = \frac{P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

c) **Vrai.** $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ et $P(A) \leq 1$, donc le produit est inférieur ou égal à $P_A(B)$.

Réponse. a) faux · b) vrai · c) vrai.

Correction de l'exercice 13 - Transport des élèves

Tirage au hasard : chaque probabilité conditionnelle est une fréquence calculée dans une ligne ou une colonne.

$$P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$$

— $P_S(B) = \frac{90}{180} = 0,5$;

— $P_T(B) = \frac{60}{150} = 0,4$;

— $P_B(S) = \frac{90}{220} \approx 0,409$;

$$- P_B(\bar{S}) = 1 - P_B(S) = \frac{130}{220} \approx 0,591.$$

Un élève de seconde prend le bus avec une probabilité 0,5, un élève de terminale avec une probabilité 0,4.

Réponse. $P_S(B) = 0,5$; $P_T(B) = 0,4$; $P_B(S) \approx 0,409$; $P_B(\bar{S}) \approx 0,591$.

Correction de l'exercice 14 - Utilisateurs d'une application

a) Tirage équiprobable :

$$P_S(A) = \frac{\text{Card}(S \cap A)}{\text{Card}(S)} = \frac{400}{600} = \frac{2}{3} \quad P_A(S) = \frac{400}{450} = \frac{8}{9}$$

Deux possesseurs de smartphone récent sur trois utilisent l'application ; presque tous les utilisateurs de l'application ($\approx 89\%$) ont un smartphone récent.

b) Formule de la réunion :

$$P(S \cup A) = P(S) + P(A) - P(S \cap A) = 0,6 + 0,45 - 0,4 = 0,65$$

Réponse. a) $\frac{2}{3}$ et $\frac{8}{9}$ · b) 0,65.

Correction de l'exercice 15 - Toutes les probabilités

$$- \text{Par définition : } P_A(B) = \frac{0,15}{0,5} = 0,3 \text{ et } P_B(A) = \frac{0,15}{0,4} = 0,375.$$

$$- P_A(\bar{B}) = 1 - 0,3 = 0,7.$$

- Réunion :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,4 - 0,15 = 0,75$$

Tableau, complété par différences :

	A	$\bar{A}$	Total
B	0,15	0,25	0,4
$\bar{B}$	0,35	0,25	0,6
Total	0,5	0,5	1

Contrôle. $P(A \cap \bar{B}) = 0,35 = P(A) \times P_A(\bar{B}) = 0,5 \times 0,7$.

Réponse. $P_A(B) = 0,3$; $P_B(A) = 0,375$; $P_A(\bar{B}) = 0,7$; $P(A \cup B) = 0,75$.