

Plaquelette 5 – Problèmes de synthèse : probabilités conditionnelles en situation

Probabilités conditionnelles — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Méthode générale.

- Traduire : « parmi », « sachant », « quand », « si » annoncent une probabilité conditionnelle.
- Représenter : arbre pondéré (expérience en étapes), tableau d'effectifs (population), liste d'issues (équiprobabilité).
- Chemin : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$; plusieurs chemins : somme.
- Conditionnement « à l'envers » :

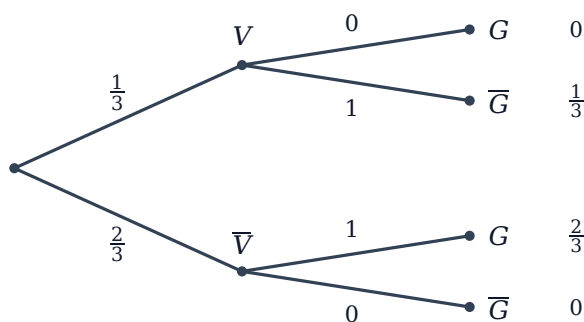
$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Comparer deux groupes : comparer $P_A(B)$ et $P_{\bar{A}}(B)$, jamais des effectifs bruts.
- Contrôle : feuilles de l'arbre de somme 1 ; marges du tableau cohérentes.

Correction de l'exercice 1 – Le jeu des trois portes

On note V : « le premier choix est la bonne porte », avec $P(V) = \frac{1}{3}$, et G : « le candidat gagne en changeant ».

- Si son premier choix est bon, en changeant il perd à coup sûr : $P_V(G) = 0$.
- Sinon, l'animateur ouvre la seule porte vide restante ; la porte proposée est celle de la voiture : $P_{\bar{V}}(G) = 1$.



V : premier choix sur la voiture ; G : gagne en changeant

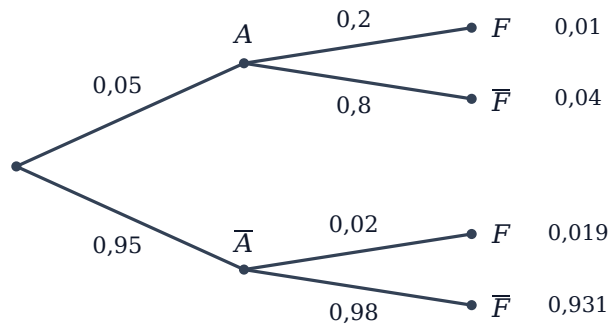
$$P(G) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$$

En changeant, le candidat gagne avec la probabilité $\frac{2}{3}$, contre $\frac{1}{3}$ s'il garde sa porte. Il a intérêt à changer : l'information donnée par l'animateur n'est pas « neutre », car il ne peut pas ouvrir la porte de la voiture.

Réponse. Oui : $P(G) = \frac{2}{3}$ en changeant, contre $\frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 2 – Deux défauts

On construit l'arbre à partir des données.



A : défaut d'aspect ; F : défaut de fonctionnement

a) Deux chemins mènent à F :

$$P(F) = 0,05 \times 0,2 + 0,95 \times 0,02 = 0,01 + 0,019 = 0,029$$

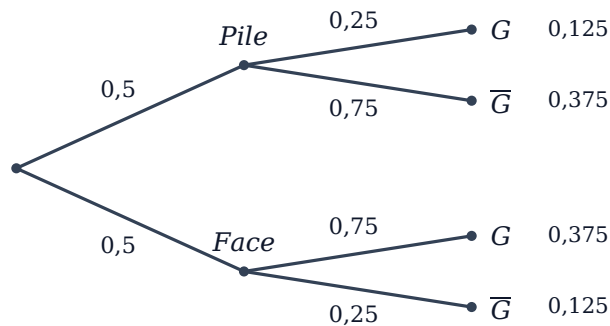
b) $P_F(A) = \frac{0,01}{0,029} \approx 0,345$: un défaut d'aspect est un indice fort (5 % des appareils seulement, mais environ 34 % des appareils en panne).

c) « Aucun défaut » est le chemin $\bar{A} \cap \bar{F}$: $0,95 \times 0,98 = 0,931$.

Réponse. a) 0,029 · b) environ 0,345 · c) 0,931.

Correction de l'exercice 3 – Un jeu de foire

$$P_{\text{pile}}(G) = \frac{1}{4} \text{ et } P_{\text{face}}(G) = \frac{3}{4}.$$



Pile : urne A ; face : urne B ; G : gagne

a) Deux chemins mènent à G :

$$P(G) = 0,5 \times 0,25 + 0,5 \times 0,75 = 0,125 + 0,375 = 0,5$$

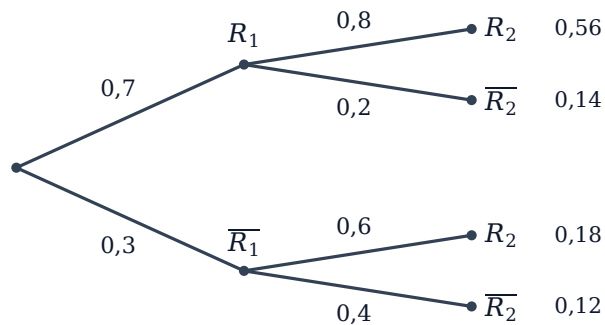
$$\text{b) } P_G(\text{pile}) = \frac{0,125}{0,5} = 0,25.$$

Les gagnants sont trois fois plus souvent passés par l'urne B, alors que les deux urnes sont choisies avec la même probabilité.

Réponse. a) 0,5 · b) 0,25.

Correction de l'exercice 4 – Lancers francs

Le second lancer dépend du premier (confiance) : on lit des probabilités conditionnelles au second niveau.



R1, R2 : premier, second lancer réussi

- a) Deux réussites : $0,7 \times 0,8 = 0,56$. Exactement une : deux chemins,
 $0,7 \times 0,2 + 0,3 \times 0,6 = 0,14 + 0,18 = 0,32$

Aucune : $0,3 \times 0,4 = 0,12$. **Contrôle** : $0,56 + 0,32 + 0,12 = 1$.

- b) $P(R_2) = 0,56 + 0,18 = 0,74$, puis $P_{R_2}(R_1) = \frac{0,56}{0,74} \approx 0,757$.

Réponse. a) 0,56 ; 0,32 ; 0,12 · b) environ 0,757.

Correction de l'exercice 5 – Une question délicate

- a) Arbre : pile (0,5) puis réponse honnête, « oui » avec la probabilité p ; face (0,5) puis « oui » avec la probabilité 1. Deux chemins mènent à « oui » :

$$P(\text{oui}) = 0,5 \times p + 0,5 \times 1 = 0,5p + 0,5$$

- b) On égale la probabilité à la fréquence observée (loi des grands nombres) :

$$0,5p + 0,5 = 0,6 \Leftrightarrow 0,5p = 0,1 \Leftrightarrow p = 0,2$$

Environ 20 % des personnes ont déjà triché.

- c) Un « oui » ne prouve rien : il peut venir d'un « face ». L'enquêteur ne connaît pas le résultat de la pièce, donc personne n'est démasqué, ce qui encourage les réponses honnêtes.

Réponse. a) $0,5p + 0,5$ · b) $p = 0,2$.

Correction de l'exercice 6 – Alcool au volant

- a) 2 000 trajets avec alcool, dont $0,005 \times 2\,000 = 10$ accidents ; 98 000 sans alcool, dont $0,0005 \times 98\,000 = 49$ accidents.

	Alcool	Sans alcool	Total
Accident	10	49	59
Pas d'accident	1 990	97 951	99 941
Total	2 000	98 000	100 000

- b) Référence : les 59 accidents.

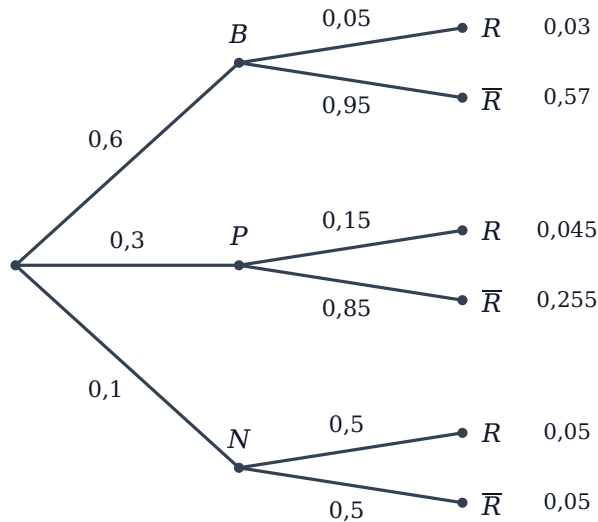
$$P_{\text{accident}}(\text{alcool}) = \frac{10}{59} \approx 0,17$$

c) Les trajets sans alcool sont 49 fois plus nombreux : il est normal qu'ils fournissent la majorité des accidents. Le risque, lui, se compare **dans chaque groupe** : 0,5 % contre 0,05 %, soit un risque **dix fois plus élevé** avec alcool.

Réponse. b) environ $0,17$ · c) le risque est dix fois plus élevé avec alcool.

Correction de l'exercice 7 – Trains et météo

Le premier niveau a trois branches : 0,6, 0,3 et $1 - 0,6 - 0,3 = 0,1$.



B : beau ; P : pluie ; N : neige ; R : retard

a) Trois chemins mènent à R :

$$P(R) = 0,6 \times 0,05 + 0,3 \times 0,15 + 0,1 \times 0,5 = 0,03 + 0,045 + 0,05 = 0,125$$

b) $P_R(N) = \frac{0,05}{0,125} = 0,4.$

La neige ne concerne que 10 % des jours mais 40 % des retards.

Réponse. a) 0,125 · b) 0,4.

Correction de l'exercice 8 – Médicament ou placebo

a) Dans chaque groupe :

$$P_{\text{méd}}(G) = \frac{140}{200} = 0,7 \quad P_{\text{placebo}}(G) = \frac{100}{200} = 0,5$$

Le médicament fait passer la probabilité de guérison de 0,5 à 0,7 : il est efficace dans cet essai. Le groupe placebo montre que la moitié des patients guérissent de toute façon.

b) $P_G(\text{méd}) = \frac{140}{240} \approx 0,583$. Cette probabilité dépend de la répartition des patients entre les deux groupes : si on avait donné le médicament à 90 % des patients, la plupart des guéris l'auraient pris, même sans aucune efficacité. On juge un traitement en comparant $P_{\text{méd}}(G)$ et $P_{\text{placebo}}(G)$.

Réponse. a) 0,7 contre 0,5 : efficace · b) environ 0,583.

Correction de l'exercice 9 – Fraude dans le train

On note F : « fraudeur » et C : « contrôlé ». Le contrôle est fait au hasard : $P_F(C) = P_{\bar{F}}(C) = 0,1$.

a) Chemin $F \cap C$:

$$P(F \cap C) = P(F) \times P_F(C) = 0,08 \times 0,1 = 0,008$$

b) $P(C) = 0,1$, d'où $P_C(F) = \frac{0,008}{0,1} = 0,08$: le contrôleur trouve 8 % de fraudeurs, la même proportion que dans le train.

c) Non : $P_F(C) = P_{\bar{F}}(C) = 0,1$. Avec un contrôle au hasard, l'information « être contrôlé » ne change pas la probabilité d'être fraudeur.

Réponse. a) 0,008 · b) 8 % · c) non.

Correction de l'exercice 10 - Des robots dans un sondage

On note R : « robot » et B : « bloqué ».

a) Deux chemins mènent à B :

$$P(B) = 0,1 \times 0,95 + 0,9 \times 0,03 = 0,095 + 0,027 = 0,122$$

$$\text{et } P_B(R) = \frac{0,095}{0,122} \approx 0,779.$$

b) Réponses acceptées : $P(\bar{B}) = 1 - 0,122 = 0,878$, dont robots
 $P(R \cap \bar{B}) = 0,1 \times 0,05 = 0,005$.

$$P_{\bar{B}}(R) = \frac{0,005}{0,878} \approx 0,0057$$

Moins de 0,6 % des réponses acceptées viennent de robots (contre 10 % avant filtrage), au prix d'environ 3 % d'humains bloqués à tort.

Réponse. a) 0,122 ; environ 0,779 · b) environ 0,0057.

Correction de l'exercice 11 - Un double au dé

Les 36 couples (premier dé ; second dé) sont équiprobables. On compte :

$$P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$$

a) Somme 8 : (2 ; 6), (3 ; 5), (4 ; 4), (5 ; 3), (6 ; 2), soit 5 couples, dont un seul double, (4 ; 4) :
 $P = \frac{1}{5}$.

b) Doubles : (1 ; 1), ..., (6 ; 6), soit 6 couples, dont un de somme 8 : $P = \frac{1}{6}$.

Même intersection, (4 ; 4), mais pas le même événement connu.

Réponse. a) $\frac{1}{5}$ · b) $\frac{1}{6}$.

Correction de l'exercice 12 - Corriger une copie

Première erreur. L'élève multiplie $P(C)$ par $P(V)$. La bonne formule utilise la probabilité conditionnelle donnée par l'énoncé :

$$P(C \cap V) = P(C) \times P_C(V) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$$

Seconde erreur. Le 0,3 de l'énoncé est $P_C(V)$ (« parmi les clients qui ont un crédit »), pas $P_V(C)$. On calcule :

$$P_V(C) = \frac{P(C \cap V)}{P(V)} = \frac{0,12}{0,36} = \frac{1}{3}$$

Un tiers des clients qui ont une assurance-vie ont aussi un crédit immobilier.

Réponse. $P(C \cap V) = 0,12$ et $P_V(C) = \frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 13 - Deux urnes indiscernables

a) Deux chemins, avec $P(U_1) = P(U_2) = 0,5$, $P_{U_1}(B) = 0,75$ et $P_{U_2}(B) = 0,25$:

$$P(B) = 0,5 \times 0,75 + 0,5 \times 0,25 = 0,375 + 0,125 = 0,5$$

b) $P_B(U_1) = \frac{0,375}{0,5} = 0,75$.

c) Probabilité de deux blanches (même urne, avec remise) :

$$P(B_1 \cap B_2) = 0,5 \times 0,75^2 + 0,5 \times 0,25^2 = 0,28125 + 0,03125 = 0,3125$$

d'où $P_{B_1}(B_2) = \frac{0,3125}{0,5} = 0,625$. La première boule blanche rend l'urne 1 plus probable, donc une seconde blanche aussi.

Réponse. a) $0,5$ · b) $0,75$ · c) $0,625$.

Correction de l'exercice 14 - Premier emploi

a) 300 diplômés avec stage, dont $0,9 \times 300 = 270$ en emploi ; 200 sans stage, dont $0,75 \times 200 = 150$ en emploi.

	Stage à l'étranger	Pas de stage	Total
Emploi	270	150	420
Sans emploi	30	50	80
Total	300	200	500

b) Référence : les 420 diplômés en emploi.

$$P_E(S) = \frac{270}{420} \approx 0,643$$

c) Non, pas avec certitude : on observe un **lien** (90 % contre 75 %), mais les étudiants qui partent à l'étranger ont peut-être d'autres atouts (langues, réseau, moyens financiers). Un lien statistique ne prouve pas une cause.

Réponse. b) environ $0,643$ · c) non : lien n'est pas cause.

Correction de l'exercice 15 - Club de tennis

a) Arbre : $P(F) = 0,4$, $P_F(C) = 0,4$; $P(\bar{F}) = 0,6$, $P_{\bar{F}}(C) = 0,2$. Tableau : $0,4 \times 100 = 40$ compétitrices et $0,2 \times 150 = 30$ compétiteurs.

	Femmes	Hommes	Total
Compétition	40	30	70
Loisir	60	120	180
Total	100	150	250

b) $P(C) = \frac{70}{250} = 0,28$;

$$P_C(F) = \frac{40}{70} = \frac{4}{7} \approx 0,571 \quad P_{\bar{C}}(F) = \frac{60}{180} = \frac{1}{3}$$

c) Les femmes jouent deux fois plus souvent en compétition (40 % contre 20 %) ; et elles sont majoritaires parmi les compétiteurs (environ 57 %) alors qu'elles ne sont que 40 % du club.

Réponse. b) $P(C) = 0,28$; $P_C(F) = \frac{4}{7}$; $P_{\overline{C}}(F) = \frac{1}{3}$.