

Plaquette 3 – Ne pas inverser le conditionnement : tests et faux positifs

Probabilités conditionnelles — Seconde

Exercices

Méthode

Un test est décrit par des probabilités **sachant l'état réel** (sensibilité, spécificité) ; la personne testée veut connaître la probabilité **sachant le résultat du test**. Pour passer de l'une à l'autre sans se tromper, on raisonne sur une population fictive de 10 000 personnes et l'on dresse le tableau croisé.

Exercice 1 – Un test qui semble fiable

Une maladie touche 1 % de la population. Un test a une sensibilité de 90 % et une spécificité de 91 %. En raisonnant sur 10 000 personnes :

- a) dresser le tableau croisé (état, résultat du test) ;
- b) calculer la probabilité qu'une personne testée positive soit malade.

Exercice 2 – Le vocabulaire des tests

Une notice indique : « Le test détecte 98 % des personnes infectées. Il donne un résultat négatif pour 99 % des personnes non infectées. » On note I : « la personne est infectée », T : « le test est positif ».

- a) Traduire ces deux phrases en notations ; nommer chaque probabilité.
- b) Quelles sont les probabilités d'un faux négatif chez une personne infectée, et d'un faux positif chez une personne non infectée ?

Exercice 3 – L'effet de la prévalence

Un test a une sensibilité de 90 % et une spécificité de 95 %. Calculer $P_T(M)$ sur une population de 10 000 personnes lorsque la prévalence de la maladie vaut :

- a) 1 % (dépistage dans toute la population) ;
- b) 10 % ;
- c) 30 % (patients qui consultent avec des symptômes).

Exercice 4 – Un test négatif rassure-t-il ?

On reprend l'exercice 1 (prévalence 1 %, sensibilité 90 %, spécificité 91 %, tableau sur 10 000 personnes). Calculer la probabilité qu'une personne testée négative soit saine, puis qu'elle soit malade.

Exercice 5 – Filtre anti-spam

20 % des courriels reçus par une messagerie sont des spams. Le filtre bloque 95 % des spams, mais aussi, par erreur, 2 % des courriels légitimes.

- a) Calculer la probabilité qu'un courriel soit bloqué.

b) Un courriel est bloqué. Quelle est la probabilité que ce soit réellement un spam ?

Exercice 6 - Contrôle antidopage

On estime que 5 % des coureurs d'une compétition sont dopés. Un contrôle détecte 80 % des coureurs dopés et se trompe pour 1 % des coureurs non dopés.

- Calculer la probabilité qu'un coureur contrôlé positif soit dopé.
- Calculer la probabilité qu'un coureur dopé passe le contrôle sans être détecté.

Exercice 7 - Confirmer par un second test

Une maladie touche 2 % d'une population de 100 000 personnes. Un test de sensibilité 95 % et de spécificité 90 % est fait par tous ; les personnes positives passent un second test identique, dont on suppose que les erreurs ne dépendent pas du premier.

- Combien de personnes sont positives au premier test ? Calculer $P_T(M)$.
- Parmi les personnes positives, combien sont à nouveau positives au second test ? Calculer la probabilité d'être malade après deux tests positifs.

Exercice 8 - Alarme incendie

Dans un entrepôt, la probabilité qu'un incendie se déclare un jour donné est 0,001. S'il y a un incendie, l'alarme se déclenche avec la probabilité 0,98 ; sans incendie, elle se déclenche à tort avec la probabilité 0,03.

L'alarme sonne. Quelle est la probabilité qu'il y ait réellement un incendie ? Faut-il pour autant ignorer l'alarme ?

Exercice 9 - Une trace ADN

Une trace ADN retrouvée sur une scène de crime correspond à celle d'un suspect. Un expert affirme : « la probabilité qu'une personne innocente ait par hasard le même profil est de 1 sur 1 000 000 ». La région compte 5 000 000 d'habitants, et l'on suppose que le coupable en fait partie.

- Combien d'innocents de la région ont, en moyenne, un profil correspondant ?
- Sans autre élément, quelle est la probabilité que le suspect soit coupable sachant que son profil correspond ? Quelle confusion l'avocat général commet-il s'il dit : « il n'y a qu'une chance sur un million qu'il soit innocent » ?

Exercice 10 - Patients avec symptômes

Parmi les patients qui consultent avec des symptômes, 30 % sont atteints d'une angine bactérienne. Un test rapide est positif chez 85 % des malades et chez 10 % des non-malades.

- Construire un arbre et calculer $P(T)$.
- Calculer $P_T(M)$.

Exercice 11 - Les faux négatifs

On reprend la situation de l'exercice 10 ($P(M) = 0,3$, $P_M(T) = 0,85$, $P_{\overline{M}}(T) = 0,1$).

- Calculer $P(M \cap \overline{T})$ et $P(\overline{T})$.
- Un patient a un test négatif. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ? Le médecin doit-il exclure l'angine ?

Exercice 12 - « Fiable à 99 % »

Un fabricant annonce un test « fiable à 99 % ». On suppose qu'il veut dire : sensibilité 99 % et spécificité 99 %. La maladie touche 1 % de la population.

- Sur 10 000 personnes, combien de vrais positifs et de faux positifs ?
- Une personne positive a-t-elle « 99 % de chances » d'être malade ?

Exercice 13 - Vérifier une affirmation

Avec le tableau de l'exercice 1 (90 vrais positifs, 891 faux positifs, 10 faux négatifs, 9 009 vrais négatifs), un journaliste écrit : « 90 % des personnes positives ne sont pas malades ». Un autre écrit : « 90 % des malades sont positifs ». Vérifier chaque phrase.

Exercice 14 - Lots contaminés

Dans une usine agroalimentaire, 5 % des lots sont contaminés. Un test rapide est positif pour 98 % des lots contaminés et pour 4 % des lots sains. Sur 10 000 lots :

- dresser le tableau croisé ;
- calculer la probabilité qu'un lot positif soit contaminé, puis qu'un lot négatif soit sain.

Exercice 15 - Choisir entre deux tests

Pour une maladie de prévalence 2 %, on dispose de deux tests :

- test A : sensibilité 99 %, spécificité 90 % ;
- test B : sensibilité 90 %, spécificité 99 %.

Sur 10 000 personnes, calculer pour chaque test le nombre de faux négatifs et $P_T(M)$. Quel test choisir pour un dépistage de masse ? Pour confirmer un diagnostic ?