

Plaquette 4 – Langue naturelle, notations, modèle et loi des grands nombres

Probabilités conditionnelles – Seconde

Exercices

Méthode

Avant tout calcul, il faut **traduire** : une phrase en français devient $P(A)$, $P(A \cap B)$ ou $P_A(B)$ selon qu'elle porte sur tout le monde, sur les individus qui ont deux caractéristiques, ou sur une sous-population. Les probabilités viennent d'un **modèle** : une hypothèse (équiprobabilité) ou des fréquences observées sur un grand nombre d'expériences.

Exercice 1 – Traduire en notations

Dans une salle de sport, on choisit un adhérent au hasard. F : « c'est une femme », M : « il vient le matin ». Traduire chaque phrase par une égalité :

- « 62 % des adhérents sont des femmes. »
- « Parmi les femmes, 35 % viennent le matin. »
- « 21,7 % des adhérents sont des femmes qui viennent le matin. »
- « 40 % des personnes qui viennent le matin sont des hommes. »

Vérifier la cohérence de a), b) et c).

Exercice 2 – Des notations aux phrases

On choisit un élève au hasard dans un lycée ; I : « l'élève est interne », S : « il pratique un sport en club ». On sait que $P(I) = 0,15$, $P_I(S) = 0,6$, $P_S(I) = 0,25$ et $P(I \cap S) = 0,06$.

- Traduire chacune de ces données par une phrase.
- Calculer $P(I \cap S)$, puis $P(S)$.

Exercice 3 – Ce dé est-il équilibré ?

On lance 600 fois deux dés, notés D1 et D2, et l'on relève le nombre d'apparitions de chaque face.

Face	1	2	3	4	5	6
Dé D1	95	102	98	105	97	103
Dé D2	84	82	86	85	83	180

Pour chaque dé, proposer un modèle de probabilité.

Exercice 4 – Lancer de punaise

On lance 1 000 fois une punaise : elle retombe 620 fois pointe en l'air.

- Peut-on supposer l'équiprobabilité des deux positions ? Quel modèle proposer ?

b) Avec ce modèle, on lance deux fois la punaise. En supposant que le second lancer ne dépend pas du premier, construire un arbre et calculer la probabilité qu'elle retombe deux fois pointe en l'air.

Exercice 5 - Observer la loi des grands nombres

On simule n lancers d'un dé équilibré et l'on calcule la fréquence f du résultat 6. Voici quatre simulations :

n	10	100	1 000	100 000
f	0,3	0,19	0,172	0,1668

- Que remarque-t-on ?
- Un élève obtient $f = 0,3$ avec $n = 10$ et conclut que le dé est truqué. Qu'en penser ?

Exercice 6 - Simuler la somme de deux dés

On considère la fonction Python suivante :

```
from random import randint

def frequence_sept(n):
    compteur = 0
    for k in range(n):
        if randint(1, 6) + randint(1, 6) == 7:
            compteur = compteur + 1
    return compteur / n
```

- Que simule-t-elle ? Que renvoie-t-elle ?
- Calculer la probabilité d'obtenir une somme égale à 7 avec deux dés équilibrés. Autour de quelle valeur $frequence_sept(100000)$ donne-t-elle ses résultats ?

Exercice 7 - Simuler une probabilité conditionnelle

Une urne contient 3 boules rouges et 2 vertes ; on tire deux boules sans remise. On simule l'expérience :

```
from random import randint

def simulation(n):
    nb_r2 = 0
    nb_r1_r2 = 0
    for k in range(n):
        r1 = randint(1, 5) <= 3
        if r1:
            r2 = randint(1, 4) <= 2
        else:
            r2 = randint(1, 4) <= 3
        if r2:
            nb_r2 = nb_r2 + 1
            if r1:
                nb_r1_r2 = nb_r1_r2 + 1
    return nb_r1_r2 / nb_r2
```

- a) Expliquer les lignes qui définissent $r1$ et $r2$.
- b) Quelle probabilité la fonction estime-t-elle ? Calculer sa valeur exacte.

Exercice 8 - Garçon ou fille

En France, il naît en moyenne environ 105 garçons pour 100 filles.

- a) Proposer un modèle pour le sexe d'un nouveau-né.
- b) Une famille a deux enfants. On suppose que le sexe du second ne dépend pas de celui du premier. Calculer la probabilité qu'elle ait deux garçons.

Exercice 9 - Une réciproque fausse

Un élève affirme : « si $P_A(B) = 0,9$, alors $P_B(A) = 0,9$ ». On considère 1 000 personnes : 100 sont des A , dont 90 sont des B ; parmi les 900 autres, 300 sont des B . Calculer $P_A(B)$ et $P_B(A)$ et conclure.

Exercice 10 - Une pièce bien équilibrée ?

Deux élèves testent la même pièce. Léo obtient 60 piles sur 100 lancers ; Inès obtient 5 080 piles sur 10 000 lancers.

- a) Calculer les deux fréquences observées.
- b) Lequel des deux résultats renseigne le mieux sur la pièce ? Les résultats font-ils douter de l'équilibre de la pièce ?

Exercice 11 - Deux enfants

On choisit au hasard une famille de deux enfants. On suppose que les quatre cas GG, GF, FG, FF (aîné puis cadet) sont équiprobables.

- a) On sait que la famille a **au moins un garçon**. Quelle est la probabilité qu'elle ait deux garçons ?
- b) On sait que **l'aîné** est un garçon. Même question.

Exercice 12 - « Et » ou « sachant »

On choisit au hasard un élève parmi 500 ; 180 sont en seconde, dont 90 prennent le bus ; au total, 220 prennent le bus. Calculer et ne pas confondre :

- a) la probabilité que l'élève soit en seconde **et** prenne le bus ;
- b) la probabilité qu'il prenne le bus **sachant** qu'il est en seconde ;
- c) la probabilité qu'il soit en seconde **sachant** qu'il prend le bus.

Exercice 13 - Prévisions météo

Un service météo annonce de la pluie 30 % des jours. Quand il annonce de la pluie, il pleut effectivement 80 % des fois ; quand il annonce du beau temps, il pleut quand même 10 % des fois. On choisit un jour au hasard.

- a) Traduire les données en notations, avec A : « pluie annoncée » et R : « il pleut ».

b) Calculer $P(R)$, puis la probabilité que la pluie ait été annoncée sachant qu'il a plu.

Exercice 14 – Une population de lycéens

Dans un lycée de 1 200 élèves, 480 font de l'anglais renforcé (E) et 300 sont en filière technologique (T) ; 60 élèves de la filière technologique font de l'anglais renforcé. On choisit un élève au hasard.

- a) On sait que l'élève est en filière technologique. Quelle est la probabilité qu'il fasse de l'anglais renforcé ?
- b) On sait qu'il ne fait pas d'anglais renforcé. Quelle est la probabilité qu'il soit en filière technologique ?

Exercice 15 – Estimer une probabilité inconnue

Un fabricant de jeux veut connaître la probabilité qu'un dé à 12 faces, mal équilibré, donne un nombre premier (2, 3, 5, 7 ou 11). Il le lance 5 000 fois et obtient 2 180 nombres premiers, dont 560 fois le nombre 2.

- a) Proposer une valeur pour $P(\text{premier})$.
- b) Estimer la probabilité d'obtenir 2 sachant que le résultat est premier.
- c) Pourquoi ces valeurs ne sont-elles que des estimations ?