

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse : probabilités conditionnelles en situation

Probabilités conditionnelles — Seconde

Exercices

Méthode

Dans un problème, il faut d'abord **choisir la représentation** (arbre, tableau d'effectifs sur 10 000 individus, comptage d'issues équiprobables), puis **traduire chaque donnée** en $P(A)$, $P_A(B)$ ou $P(A \cap B)$, et enfin répondre à la question posée, souvent un conditionnement « à l'envers ».

Exercice 1 - Le jeu des trois portes

Dans un jeu télévisé, une voiture est cachée derrière l'une de trois portes, au hasard. Le candidat choisit une porte. L'animateur, qui sait où est la voiture, ouvre alors une **autre** porte, derrière laquelle il n'y a rien, et propose au candidat de changer de porte.

Le candidat a-t-il intérêt à changer ? Calculer la probabilité de gagner s'il change systématiquement.

Exercice 2 - Deux défauts

Sur une chaîne de montage, 5 % des appareils ont un défaut d'aspect (A). Parmi eux, 20 % ont aussi un défaut de fonctionnement (F) ; parmi les appareils sans défaut d'aspect, 2 % ont un défaut de fonctionnement.

- Calculer la probabilité qu'un appareil ait un défaut de fonctionnement.
- Un appareil a un défaut de fonctionnement. Quelle est la probabilité qu'il ait aussi un défaut d'aspect ?
- Quelle est la probabilité qu'un appareil n'ait aucun défaut ?

Exercice 3 - Un jeu de foire

Un forain fait lancer une pièce équilibrée. Pile : le joueur tire un ticket dans l'urne A (1 ticket gagnant sur 4) ; face : dans l'urne B (3 tickets gagnants sur 4).

- Calculer la probabilité de gagner.
- Un joueur a gagné. Quelle est la probabilité que sa pièce soit tombée sur pile ?

Exercice 4 - Lancers francs

Une basketteuse tire deux lancers francs. Elle réussit le premier avec la probabilité 0,7. Si elle l'a réussi, elle réussit le second avec la probabilité 0,8 ; sinon, avec la probabilité 0,6.

- Calculer la probabilité qu'elle réussisse les deux lancers, exactement un lancer, aucun lancer.
- Elle a réussi le second lancer. Quelle est la probabilité qu'elle ait réussi le premier ?

Exercice 5 – Une question délicate

Pour une question gênante (« Avez-vous déjà triché à un examen ? »), un enquêteur utilise la méthode suivante : chaque personne lance une pièce en secret. Pile : elle répond honnêtement ; face : elle répond « oui » quoi qu'il arrive. On note p la proportion de tricheurs dans la population.

- Exprimer la probabilité qu'une personne réponde « oui » en fonction de p .
- 60 % des personnes interrogées ont répondu « oui ». Estimer p .
- Pourquoi cette méthode protège-t-elle les personnes interrogées ?

Exercice 6 – Alcool au volant

Sur 100 000 trajets de nuit, on estime que 2 % sont effectués par un conducteur alcoolisé. Un accident se produit sur 0,5 % des trajets avec alcool et sur 0,05 % des trajets sans alcool.

- Dresser un tableau d'effectifs (alcool, accident).
- Calculer la probabilité qu'un accident implique un conducteur alcoolisé.
- Un article dit : « 83 % des accidents de nuit se produisent sans alcool, l'alcool n'est donc pas le problème ». Réfuter.

Exercice 7 – Trains et météo

En hiver, sur une ligne de train, il fait beau 60 % des jours, il pleut 30 % des jours et il neige le reste du temps. Le train est en retard 5 % des jours de beau temps, 15 % des jours de pluie et 50 % des jours de neige.

- Calculer la probabilité que le train soit en retard un jour donné.
- Le train est en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait neigé ?

Exercice 8 – Médicament ou placebo

Un essai clinique compare un médicament et un placebo (comprimé sans principe actif), attribués au hasard à 400 patients :

	Médicament	Placebo	Total
Guéris	140	100	240
Non guéris	60	100	160
Total	200	200	400

On choisit un patient au hasard.

- Calculer $P_{\text{méd}}(G)$ et $P_{\text{placebo}}(G)$. Le médicament est-il efficace ?
- Calculer $P_G(\text{méd})$. Pourquoi ne suffit-elle pas à juger le médicament ?

Exercice 9 – Fraude dans le train

Dans un train, 8 % des voyageurs n'ont pas de billet. Un contrôleur vérifie au hasard 10 % des voyageurs.

- a) Quelle est la probabilité qu'un voyageur choisi au hasard soit un fraudeur contrôlé ?
- b) Parmi les voyageurs contrôlés, quelle proportion de fraudeurs le contrôleur trouve-t-il ?
- c) Un fraudeur a-t-il plus de chances d'être contrôlé qu'un voyageur en règle ?

Exercice 10 - Des robots dans un sondage

Un questionnaire en ligne reçoit des réponses dont 10 % proviennent de robots. Un test anti-robot bloque 95 % des robots, mais aussi 3 % des humains.

- a) Calculer la probabilité qu'une réponse soit bloquée, puis la probabilité qu'une réponse bloquée vienne d'un robot.
- b) Parmi les réponses acceptées, quelle est la proportion de réponses de robots ?

Exercice 11 - Un double au dé

On lance deux dés équilibrés.

- a) Sachant que la somme vaut 8, quelle est la probabilité d'avoir obtenu un double ?
- b) Sachant que l'on a obtenu un double, quelle est la probabilité que la somme vaille 8 ?

Exercice 12 - Corriger une copie

Énoncé : « 40 % des clients d'une banque ont un crédit immobilier (C). Parmi eux, 30 % ont aussi une assurance-vie (V). On choisit un client au hasard. Calculer $P(C \cap V)$ et $P_V(C)$, sachant que $P(V) = 0,36$. »

Un élève écrit : « $P(C \cap V) = 0,4 \times 0,36 = 0,144$ et $P_V(C) = 0,3$. » Corriger ses deux erreurs.

Exercice 13 - Deux urnes indiscernables

On dispose de deux urnes identiques. L'urne 1 contient 3 boules blanches et 1 noire ; l'urne 2 contient 1 blanche et 3 noires. On choisit une urne au hasard, puis on tire une boule.

- a) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.
- b) La boule tirée est blanche. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'urne 1 ?
- c) On remet la boule et on tire à nouveau dans la **même** urne. Sachant que la première était blanche, quelle est la probabilité que la seconde le soit aussi ?

Exercice 14 - Premier emploi

Une école de commerce suit 500 diplômés. 60 % ont fait un stage à l'étranger. Six mois après le diplôme, 90 % de ceux qui ont fait un stage à l'étranger ont un emploi, contre 75 % des autres.

- a) Dresser le tableau croisé (stage, emploi).
- b) Un diplômé choisi au hasard a un emploi. Quelle est la probabilité qu'il ait fait un stage à l'étranger ?

c) Peut-on en conclure que le stage à l'étranger fait trouver un emploi ?

Exercice 15 – Club de tennis

Un club de tennis compte 250 licenciés : 100 femmes et 150 hommes. 40 % des femmes et 20 % des hommes jouent en compétition. On choisit un licencié au hasard ; F : « c'est une femme », C : « il joue en compétition ».

- Représenter la situation par un arbre, puis par un tableau d'effectifs.
- Calculer $P(C)$, $P_C(F)$ et $P_{\bar{C}}(F)$.
- Le président affirme : « la compétition attire surtout les femmes ». Justifier par deux arguments chiffrés.