

MATHÉMATIQUES

Probabilités conditionnelles

Seconde

Modèle probabiliste • Loi des grands
nombres • Probabilité conditionnelle • $P_A(B)$
Tableau croisé • Arbre pondéré • Faux positifs • Sensibilité • Spécificité

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de mathématiques de seconde générale et technologique** (arrêté du 26 février 2026, BO n°14 du 2 avril 2026, rentrée 2026), partie « Statistiques et probabilités », section « Probabilités ». Il couvre :

- le modèle probabiliste : une loi de probabilité est une hypothèse du modèle ; version vulgarisée de la loi des grands nombres ;
- probabilité conditionnelle d'un événement B sachant un événement A de probabilité non nulle, notée $P_A(B)$;
- calcul de probabilités conditionnelles à partir d'un tableau croisé d'effectifs (tirage au sort dans une population) ou d'un arbre pondéré ;
- arbres de probabilité : pondérations, multiplication le long d'un chemin ;
- distinguer $P_A(B)$ et $P_B(A)$: faux positifs, faux négatifs, sensibilité et spécificité d'un test.

Le calcul de la probabilité d'un événement à partir de ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers n'est pas un attendu du programme de seconde : il sera formalisé en première.

Objectif : calculer une probabilité conditionnelle à partir d'un tableau croisé ou d'un arbre pondéré, et ne pas confondre $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

Table des matières

1	Modèle probabiliste	3
2	Probabilité conditionnelle	4
3	Avec un tableau croisé	4
4	Arbres pondérés	5
5	Faux positifs : ne pas inverser le conditionnement	6
6	Erreurs classiques	7
7	Fiche de synthèse	7
8	Exercices d'application	7
9	Corrigés des exercices	8

1. Modèle probabiliste

Vocabulaire

Une **expérience aléatoire** a plusieurs résultats possibles, les **issues**, dont on ne peut pas prévoir lequel se produira. L'ensemble des issues est l'**univers** Ω . Un **événement** est une partie de Ω . Pour deux événements A et B :

- $A \cap B$ (« A et B ») est réalisé quand A et B le sont tous les deux ;
- $A \cup B$ (« A ou B ») est réalisé quand l'un au moins des deux l'est ;
- $\overline{A}$ (contraire de A) est réalisé quand A ne l'est pas ; A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.

Loi de probabilité

Choisir une **loi de probabilité**, c'est associer à chaque issue un nombre positif, sa probabilité, la somme de ces nombres valant 1. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le composent. On a $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, et $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A et B sont incompatibles.

Équiprobabilité

Si toutes les issues ont la même probabilité, alors pour tout événement A :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}}.$$

Un modèle n'est pas la réalité

L'équiprobabilité est une **hypothèse** du modèle (dé « équilibré », tirage « au hasard ») : elle ne se démontre pas. Pour une punaise qui tombe sur la pointe ou sur le côté, aucune symétrie ne permet de supposer l'équiprobabilité : on construit le modèle à partir des fréquences observées.

Loi des grands nombres, version vulgarisée

Lorsqu'on répète un grand nombre n de fois une expérience aléatoire dans les mêmes conditions, de façon indépendante, la fréquence observée d'un événement est, sauf exception, proche de sa probabilité.

Simulation en Python

```
from random import randint

def frequence_six(n):
    compteur = 0
    for k in range(n):
        if randint(1, 6) == 6:
            compteur = compteur + 1
    return compteur / n
```

Pour $n = 10$, la fréquence obtenue varie beaucoup d'un appel à l'autre ; pour $n = 100\,000$, elle est presque toujours très proche de $\frac{1}{6} \approx 0,167$.

2. Probabilité conditionnelle

Probabilité de B sachant A

Soit A un événement de probabilité non nulle. La **probabilité de B sachant A** est

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

C'est la probabilité que B soit réalisé **lorsqu'on sait** que A l'est : l'univers est « réduit » à A .

Cas de l'équiprobabilité

Dans le cas d'un tirage équiprobable :

$$P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}.$$

Démonstration. $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\text{Card}(A \cap B)/\text{Card}(\Omega)}{\text{Card}(A)/\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}.$

Un dé équilibré

On lance un dé équilibré. A : « le résultat est pair » = $\{2; 4; 6\}$; B : « le résultat est au moins 4 » = $\{4; 5; 6\}$. Alors $A \cap B = \{4; 6\}$ et $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

$$P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)} = \frac{2}{3}.$$

Savoir que le résultat est pair fait passer la probabilité de B de $\frac{1}{2}$ à $\frac{2}{3}$: parmi les issues paires, deux sur trois sont au moins égales à 4.

Probabilité de l'intersection

Si $P(A) \neq 0$: $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

3. Avec un tableau croisé

Tirage au sort d'un individu

On choisit un individu au hasard dans une population (équiprobabilité). La probabilité d'un événement est la fréquence correspondante du tableau croisé : fréquence marginale pour $P(A)$, fréquence d'une case pour $P(A \cap B)$, fréquence conditionnelle pour $P_A(B)$.

Transport des élèves

On choisit au hasard un élève parmi les 500 du tableau :

	Seconde (S)	Première	Terminale	Total
Bus (B)	90	70	60	220
Autre	90	100	90	280
Total	180	170	150	500

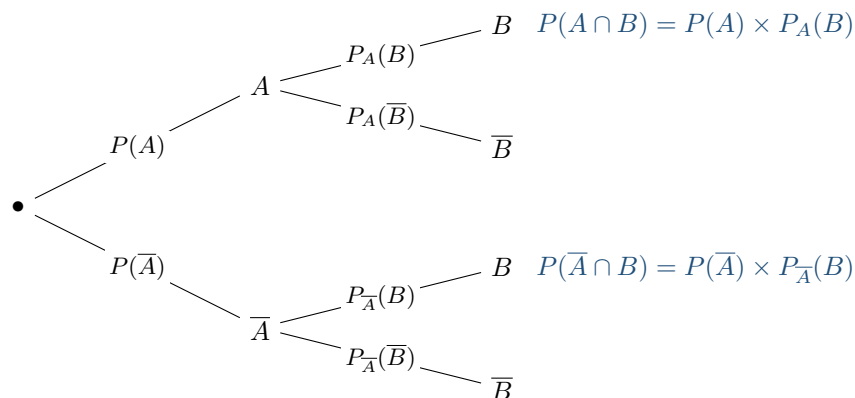
$P(S) = \frac{180}{500} = 0,36$; $P(S \cap B) = \frac{90}{500} = 0,18$; $P_S(B) = \frac{90}{180} = 0,5$; $P_B(S) = \frac{90}{220} \approx 0,41$. On vérifie que $P(S) \times P_S(B) = 0,36 \times 0,5 = 0,18$.

4. Arbres pondérés

Arbre pondéré

Un **arbre pondéré** représente une expérience en plusieurs étapes. Chaque branche porte une probabilité :

- les branches du premier niveau portent $P(A)$, $P(\bar{A})$;
- les branches du second niveau portent des probabilités **conditionnelles** : celle qui part de A vers B porte $P_A(B)$;
- la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1.



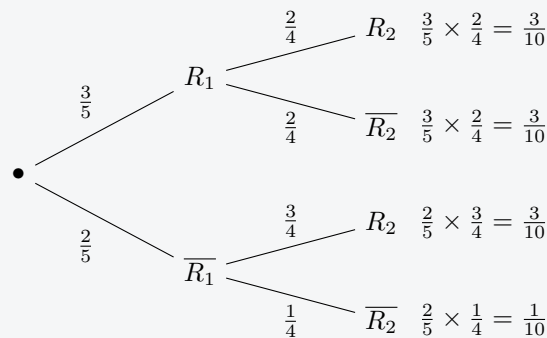
Un chemin correspond à une intersection : on multiplie les probabilités le long du chemin.

Règles de lecture

- La probabilité d'un **chemin** (une intersection) est le **produit** des probabilités de ses branches.
- Plusieurs chemins correspondent à des événements incompatibles : la probabilité d'un événement réalisé par plusieurs chemins est la **somme** des probabilités de ces chemins.

Tirages sans remise

Un sac contient 3 boules rouges et 2 vertes. On tire une boule, on ne la remet pas, puis on en tire une seconde. R_1 : « la première est rouge », R_2 : « la seconde est rouge ».



Après une rouge, il reste 2 rouges et 2 vertes : $P_{R_1}(R_2) = \frac{2}{4}$. La probabilité de tirer deux boules de la même couleur est $\frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$ (deux chemins). Contrôle : les quatre chemins totalisent $\frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = 1$.

Pièces défectueuses

Une usine produit 60 % de ses pièces sur la machine A et 40 % sur la machine B . 3 % des pièces de A et 5 % des pièces de B sont défectueuses (D). On choisit une pièce au hasard.

- $P(A \cap D) = 0,6 \times 0,03 = 0,018$ et $P(B \cap D) = 0,4 \times 0,05 = 0,02$;
- en lisant l'arbre (deux chemins mènent à D) : $P(D) = 0,018 + 0,02 = 0,038$;
- la pièce est défectueuse : la probabilité qu'elle vienne de A est

$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0,018}{0,038} \approx 0,47.$$

5. Faux positifs : ne pas inverser le conditionnement

Vocabulaire des tests

Un test de dépistage d'une maladie M est positif (T) ou négatif ($\overline{T}$).

- **Sensibilité** : $P_M(T)$, probabilité qu'un malade soit détecté ;
- **spécificité** : $P_{\overline{M}}(\overline{T})$, probabilité qu'une personne saine ait un test négatif ;
- un **faux positif** est une personne saine testée positive ; un **faux négatif**, une personne malade testée négative.

Un test « fiable à 95 % »

Une maladie touche 2 % de la population. Le test a une sensibilité de 95 % et une spécificité de 90 %. On raisonne sur 10 000 personnes :

	Malades	Sains	Total
Test positif	190	980	1 170
Test négatif	10	8 820	8 830
Total	200	9 800	10 000

(200 malades, dont 95 % positifs ; 9 800 sains, dont 10 % positifs à tort.) Une personne testée

positive est malade avec la probabilité

$$P_T(M) = \frac{190}{1\,170} \approx 0,16.$$

Alors que $P_M(T) = 0,95$, seule une personne positive sur six environ est malade : les faux positifs (980) sont bien plus nombreux que les vrais positifs (190), parce que la maladie est rare.

Inversion du conditionnement

$P_M(T)$ (« un malade est positif ») et $P_T(M)$ (« un positif est malade ») sont deux nombres différents, qui peuvent être très éloignés. Confondre les deux est une erreur fréquente dans les médias, au tribunal comme en médecine.

6. Erreurs classiques

À éviter

- Confondre $P(A \cap B)$ (une case rapportée au total) et $P_A(B)$ (une case rapportée à A).
- Confondre $P_A(B)$ et $P_B(A)$.
- Mettre sur une branche du second niveau une probabilité non conditionnelle.
- Additionner les probabilités le long d'un chemin au lieu de les multiplier.
- Oublier de vérifier que les branches issues d'un même nœud totalisent 1.

7. Fiche de synthèse

Équiprobabilité	$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$
Loi des grands nombres	pour n grand, la fréquence observée est, sauf exception, proche de la probabilité
Conditionnelle	$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$; équiprobabilité : $\frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$
Intersection	$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$
Arbre	second niveau = probabilités conditionnelles ; produit sur un chemin ; somme sur plusieurs chemins
Tests	sensibilité $P_M(T)$; spécificité $P_{\overline{M}}(\overline{T})$; $P_T(M) \neq P_M(T)$

8. Exercices d'application

Exercice 1 – Vaccination

Dans un groupe de 300 personnes, 180 sont vaccinées (V) ; 9 personnes vaccinées et 24 non vaccinées ont été malades (M). On choisit une personne au hasard.

1. Dresser le tableau croisé, puis calculer $P(M)$, $P_V(M)$ et $P_{\overline{V}}(M)$. Interpréter.
2. Calculer $P_M(V)$. Peut-on dire que « les vaccinés représentent 27 % des malades, donc le vaccin est peu efficace » ?

Exercice 2 – QCM

À une question de QCM à 4 propositions, un élève connaît la réponse avec la probabilité 0,6. S'il ne la connaît pas, il répond au hasard.

1. Construire un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité qu'il réponde juste.
3. Il a répondu juste. Quelle est la probabilité qu'il ait connu la réponse ?

Exercice 3 – Dépistage

Une maladie touche 1 % d'une population. Un test a une sensibilité de 99 % et une spécificité de 95 %. En raisonnant sur 10 000 personnes, calculer la probabilité qu'une personne testée positive soit malade.

9. Corrigés des exercices**Corrigé de l'exercice 1**

Corrigé.

	V	$\bar{V}$	Total
M	9	24	33
$\bar{M}$	171	96	267
Total	180	120	300

1. $P(M) = \frac{33}{300} = 0,11$; $P_V(M) = \frac{9}{180} = 0,05$; $P_{\bar{V}}(M) = \frac{24}{120} = 0,2$. Une personne non vaccinée a été malade quatre fois plus souvent qu'une personne vaccinée.
2. $P_M(V) = \frac{9}{33} \approx 0,27$. La conclusion est fausse : les vaccinés sont nombreux (60 % du groupe), il est normal qu'ils pèsent parmi les malades. Pour juger le vaccin, on compare $P_V(M)$ et $P_{\bar{V}}(M)$.

Corrigé de l'exercice 2

- Corrigé.** 1. Premier niveau : C (connaît, 0,6) et $\bar{C}$ (0,4) ; second niveau : $P_C(J) = 1$, $P_{\bar{C}}(J) = 0,25$ et $P_{\bar{C}}(\bar{J}) = 0,75$.
2. $P(C \cap J) = 0,6 \times 1 = 0,6$ et $P(\bar{C} \cap J) = 0,4 \times 0,25 = 0,1$; deux chemins mènent à J : $P(J) = 0,7$.
 3. $P_J(C) = \frac{P(C \cap J)}{P(J)} = \frac{0,6}{0,7} = \frac{6}{7} \approx 0,86$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. 100 malades, dont 99 positifs ; 9 900 sains, dont 5 % positifs, soit 495 faux positifs. Il y a $99 + 495 = 594$ tests positifs, et $P_T(M) = \frac{99}{594} = \frac{1}{6} \approx 0,17$.