Plaquette 2 – Expériences à deux épreuves : arbres et tableaux

Probabilités (introduction) — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Dénombrer les issues. Si la première épreuve a p issues et la seconde q issues :

$$\text{nombre total d'issues} = p \times q$$

Situation	Nombre d'issues
deux lancers d'une pièce	$2 \times 2 = 4$
trois lancers d'une pièce	$2 \times 2 \times 2 = 8$
deux lancers d'un dé	$6 \times 6 = 36$
une pièce puis un dé	$2 \times 6 = 12$
deux tirages **avec** remise parmi n	$n \times n$
deux tirages **sans** remise parmi n	$n \times (n-1)$

Probabilité dans un cas équiprobable.

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues de } A}{\text{nombre total d'issues}}$$

Arbre. Chaque chemin de l'arbre est une issue de l'expérience. Quand on écrit sur chaque branche la **proportion** correspondante :

— le long d'un chemin, on **multiplie** (c'est une proportion de proportion) ;

— on **additionne** les chemins qui réalisent l'événement cherché ;

— la somme de **tous** les chemins vaut 1 — c'est le contrôle final.

Avec ou sans remise. Avec remise, la composition de l'urne est la même aux deux tirages. Sans remise, il y a un objet de moins, et un de moins de la couleur sortie.

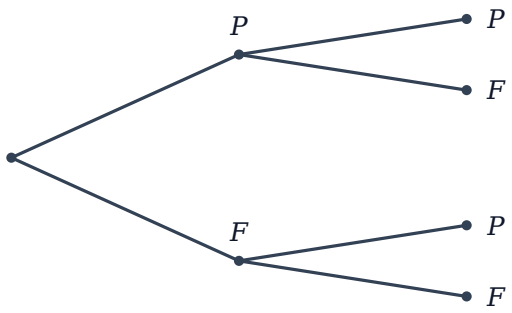
Événement contraire. Pour « au moins un… », on passe presque toujours par le contraire :

$$P(\text{au moins un}) = 1 - P(\text{aucun})$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 1 – Deux lancers d’une pièce

On dénombre les issues avec un arbre : chaque lancer donne P ou F, et chaque chemin est une issue.



P : pile, F : face — un chemin par issue

On lit $2 \times 2 = 4$ issues : PP, PF, FP, FF. La pièce étant équilibrée, ces quatre issues sont **équiprobables**.

« Exactement un pile » est réalisé par PF et FP :

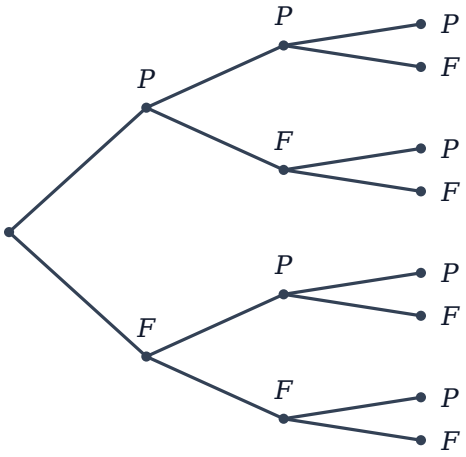
$$P(\text{exactement un pile}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Piège. Croire que « deux piles », « un pile », « aucun pile » ont chacun la probabilité $\frac{1}{3}$: « un pile » correspond à **deux** chemins, les autres à un seul.

Réponse. 4 issues et $P(\text{exactement un pile}) = \frac{1}{2}$.

Correction de l’exercice 2 – Trois lancers d’une pièce

L’arbre des trois lancers compte $2 \times 2 \times 2 = 8$ chemins, tous équiprobables.



P : pile, F : face

Exactement deux piles : PPF, PFP, FPP, soit 3 chemins :

$$P(\text{exactement deux piles}) = \frac{3}{8}$$

Au moins un pile : seul le chemin FFF n’en contient pas. On passe par l’événement contraire :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$P(\text{au moins un pile}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Réponse. $P(\text{exactement deux piles}) = \frac{3}{8}$ et $P(\text{au moins un pile}) = \frac{7}{8}$.

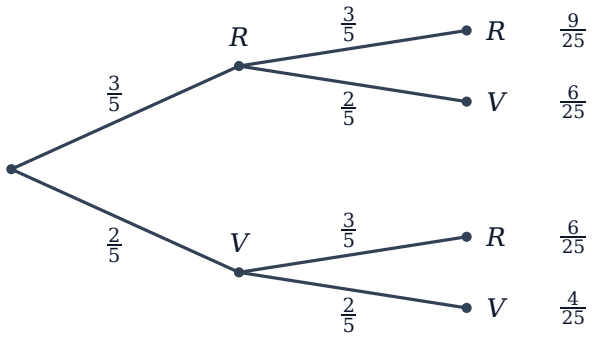
Correction de l’exercice 3 – Deux tirages avec remise

Numérotons les boules : avec remise, il y a $5 \times 5 = 25$ couples (première boule ; seconde boule), tous équiprobables.

— Deux rouges : $3 \times 3 = 9$ couples, donc $P(RR) = \frac{9}{25}$.

— Rouge puis verte : $3 \times 2 = 6$ couples ; verte puis rouge : $2 \times 3 = 6$ couples.

On résume ces calculs sur un arbre : sur chaque branche, la proportion de boules de la couleur tirée ; le long d’un chemin, on **multiplie** (c’est une proportion de proportion : $\frac{3}{5}$ des premiers tirages, puis $\frac{3}{5}$ d’entre eux).



R : rouge, V : verte (avec remise)

$$P(\text{exactement une rouge}) = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25}$$

Contrôle. $\frac{9}{25} + \frac{12}{25} + \frac{4}{25} = 1$.

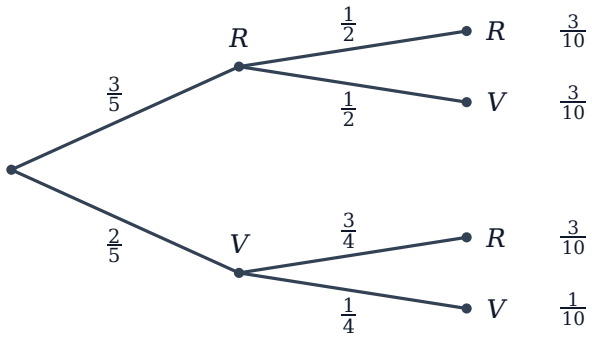
Réponse. $P(\text{deux rouges}) = \frac{9}{25}$ et $P(\text{exactement une rouge}) = \frac{12}{25}$.

Correction de l’exercice 4 – Deux tirages sans remise

Sans remise, il reste 4 boules au second tirage : $5 \times 4 = 20$ couples équiprobables. La composition change selon la première boule :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— après une rouge : 2 rouges et 2 vertes ;
— après une verte : 3 rouges et 1 verte.



Sans remise : la seconde urne a 4 boules

Deux rouges : $3 \times 2 = 6$ couples sur 20, soit $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

Exactement une rouge : RV donne $3 \times 2 = 6$ couples, VR donne $2 \times 3 = 6$ couples :

$$P(\text{exactement une rouge}) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

Comparaison. Sans remise, « deux rouges » passe de 0,36 à 0,3 et « une de chaque » de 0,48 à 0,6 : une rouge sortie rend la suivante moins probable.

Réponse. $P(\text{deux rouges}) = \frac{3}{10}$ et $P(\text{exactement une rouge}) = \frac{3}{5}$.

Correction de l’exercice 5 – Somme de deux dés

On dresse le tableau des $6 \times 6 = 36$ couples équiprobables et l’on y lit la somme.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Somme 7 : la diagonale contient 6 cases, donc $P(S = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Somme ≥ 10 : 3 cases pour 10, 2 pour 11, 1 pour 12, soit 6 cases :

$$P(S \geq 10) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Réponse. $P(S = 7) = \frac{1}{6}$ et $P(S \geq 10) = \frac{1}{6}$.

Correction de l’exercice 6 – Produit de deux dés

Le produit est **impair** seulement si les deux résultats sont impairs (1, 3 ou 5) : $3 \times 3 = 9$ couples sur 36.

On passe par l’événement contraire :

$$P(\text{produit pair}) = 1 - \frac{9}{36} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Vérification par le tableau. Dans la grille 6×6, les lignes et colonnes paires (2, 4, 6) donnent des produits pairs : il reste $3 \times 3 = 9$ cases impaires, et $36 - 9 = 27$ cases paires.

Réponse. $P(\text{produit pair}) = \dfrac{3}{4}$.

Correction de l'exercice 7 – Maximum de deux dés

Maximum au plus 4 : les deux dés donnent un résultat entre 1 et 4, soit $4 \times 4 = 16$ couples sur 36 :

$$P(\max \leq 4) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

Maximum égal à 4 : on retire des 16 couples ceux dont le maximum est au plus 3, au nombre de $3 \times 3 = 9$:

$$P(\max = 4) = \frac{16 - 9}{36} = \frac{7}{36}$$

Vérification directe. Les 7 couples sont $(4\,;1)$, $(4\,;2)$, $(4\,;3)$, $(4\,;4)$, $(1\,;4)$, $(2\,;4)$, $(3\,;4)$.

Réponse. $P(\max = 4) = \dfrac{7}{36}$ et $P(\max \leq 4) = \dfrac{4}{9}$.

Correction de l'exercice 8 – Une pièce puis un dé

Il y a $2 \times 6 = 12$ issues équiprobables (pièce ; dé).

Pile et un résultat > 4 : $(P\,;5)$ et $(P\,;6)$, soit

$$P = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Face ou un 6 : les 6 issues avec face, plus $(P\,;6)$; l'issue $(F\,;6)$ est déjà comptée. On le vérifie avec la formule de la réunion :

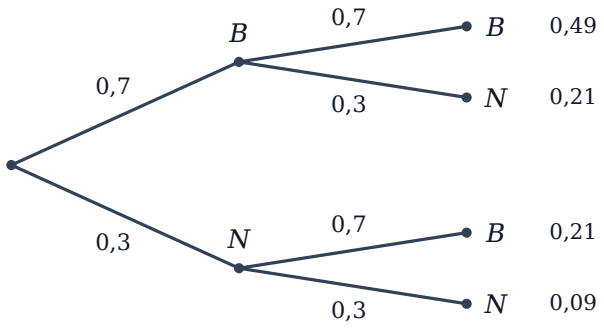
$$P(F \cup S) = \frac{6}{12} + \frac{2}{12} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$

où S est l'événement « obtenir 6 ».

Réponse. $P(\text{pile et} > 4) = \dfrac{1}{6}$ et $P(\text{face ou } 6) = \dfrac{7}{12}$.

Correction de l'exercice 9 – Arbre pondéré avec remise

Avec remise, l'urne est la même aux deux tirages : 0,7 de blanches et 0,3 de noires. Le long d'un chemin, on multiplie (proportion de proportion : $10 \times 10 = 100$ couples, dont $3 \times 3 = 9$ formés de deux noires).



B : blanche, N : noire (avec remise)

On regroupe les chemins selon le nombre de noires :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

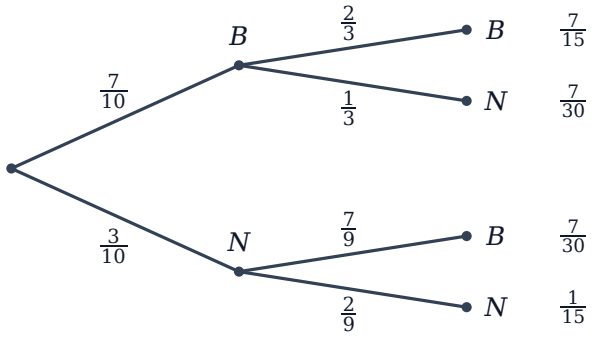
— 0 noire : BB, $0{,}7 \times 0{,}7 = 0{,}49$;
— 1 noire : BN et NB, $0{,}21 + 0{,}21 = 0{,}42$;
— 2 noires : NN, $0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}09$.

Contrôle. $0{,}49 + 0{,}42 + 0{,}09 = 1$.

Réponse. $P(0) = 0{,}49$; $P(1) = 0{,}42$; $P(2) = 0{,}09$.

Correction de l’exercice 10 – Arbre pondéré sans remise

Sans remise, il y a $10 \times 9 = 90$ couples équiprobables, et la seconde branche dépend de la première boule.



Sans remise : 9 boules au second tirage

— 0 noire : BB, $7 \times 6 = 42$ couples, soit $\dfrac{42}{90}$;
— 1 noire : BN ($7 \times 3 = 21$) et NB ($3 \times 7 = 21$), soit $\dfrac{42}{90}$;
— 2 noires : NN, $3 \times 2 = 6$ couples, soit $\dfrac{6}{90}$.

Contrôle. $42 + 42 + 6 = 90$.

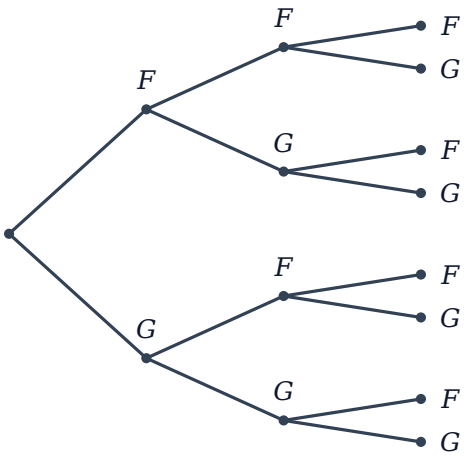
Comparaison. $P(2 \text{ noires})$ passe de $0{,}09$ à $\dfrac{6}{90} \approx 0{,}067$, et $P(1 \text{ noire})$ de $0{,}42$ à $\approx 0{,}467$: sans remise, on obtient plus souvent des couleurs différentes.

Réponse. $P(0) = P(1) = \dfrac{42}{90} \approx 0{,}467$ et $P(2) = \dfrac{6}{90} \approx 0{,}067$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 11 – Trois enfants

Sous l’hypothèse de l’énoncé, les $2 \times 2 \times 2 = 8$ chemins de l’arbre sont équiprobables.



F : fille, G : garçon

Au moins une fille : seul GGG n’en contient pas, d’où

$$P(\text{au moins une fille}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Exactement deux filles : FFG, FGF, GFF, soit

$$P(\text{exactement deux filles}) = \frac{3}{8}$$

Réponse. $P(\text{au moins une fille}) = \frac{7}{8}$ et $P(\text{exactement deux filles}) = \frac{3}{8}$.

Correction de l’exercice 12 – Code à deux chiffres

Il y a $10 \times 10 = 100$ codes, de 00 à 99, tous équiprobables.

Deux chiffres identiques : 00, 11, …, 99, soit 10 codes :

$$P = \frac{10}{100} = 0{,}1$$

Somme égale à 9 : le premier chiffre a va de 0 à 9 et le second vaut $9 - a$, qui est aussi un chiffre : 09, 18, 27, …, 90, soit 10 codes :

$$P = \frac{10}{100} = 0{,}1$$

Réponse. $P(\text{chiffres identiques}) = 0{,}1$ et $P(\text{somme} = 9) = 0{,}1$.

Correction de l’exercice 13 – Deux dés à quatre faces

Le tableau compte $4 \times 4 = 16$ cases équiprobables.

+	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

On compte les cases de chaque somme :

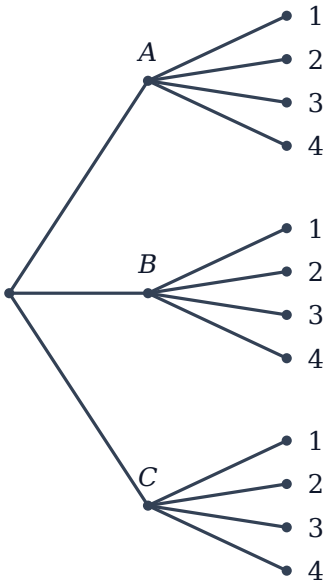
Somme	2	3	4	5	6	7	8
Probabilité	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

Contrôle. $1+2+3+4+3+2+1=16$. La somme la plus probable est 5, au centre.

Réponse. $\frac{1}{16}$; $\frac{2}{16}$; $\frac{3}{16}$; $\frac{4}{16}$; $\frac{3}{16}$; $\frac{2}{16}$; $\frac{1}{16}$ pour les sommes 2 à 8.

Correction de l’exercice 14 – Deux roues de loterie

Les secteurs étant égaux, les $3\times 4=12$ chemins de l’arbre sont équiprobables.



12 chemins équiprobables

Obtenir A : 4 chemins sur 12, donc $P(A)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

Obtenir A **et un numéro pair** : $A2$ et $A4$, soit

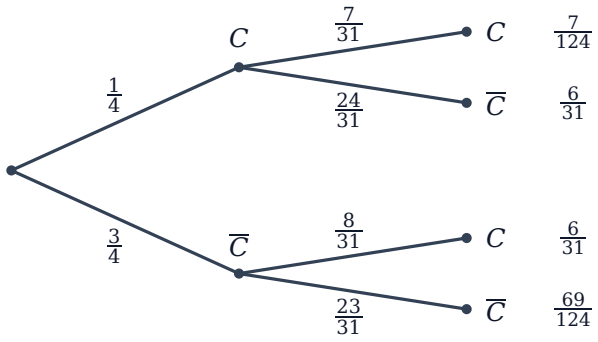
$$P=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

Réponse. $P(A)=\frac{1}{3}$ et $P(A \text{ et pair})=\frac{1}{6}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Deux tirages dans un jeu de cartes

Le jeu contient 8 cœurs. Sans remise, il y a $32 \times 31 = 992$ couples équiprobables.



C : cœur — 31 cartes au second tirage

Deux cœurs : $8 \times 7 = 56$ couples :

$$P = \frac{8}{32} \times \frac{7}{31} = \frac{56}{992} = \frac{7}{124} \approx 0{,}056$$

Au moins un cœur : le contraire est « aucun cœur », $24 \times 23 = 552$ couples :

$$P = 1 - \frac{552}{992} = \frac{440}{992} = \frac{55}{124} \approx 0{,}444$$

Réponse. $P(\text{deux cœurs}) = \frac{7}{124} \approx 0{,}056$ et $P(\text{au moins un cœur}) = \frac{55}{124} \approx 0{,}444$.

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : un jeu de dés et de jetons

a) 4 jetons puis 6 faces : $4 \times 6 = 24$ issues équiprobables. Le score va de $1 + 1 = 2$ à $4 + 6 = 10$.

b) Score 5 : (1 ; 4), (2 ; 3), (3 ; 2), (4 ; 1), soit 4 issues :

$$P(\text{score} = 5) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

c) Score au moins 8 : jeton 2 et dé 6 (1 issue), jeton 3 et dé 5 ou 6 (2), jeton 4 et dé 4, 5 ou 6 (3) :

$$P(\text{score} \geq 8) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

d) Sur un grand nombre de parties, par exemple 400, le joueur gagne environ 100 fois. Il paie $400 \times 2 = 800$ € et reçoit $100 \times 6 = 600$ € : il perd environ 200 €, soit 0,50 € par partie. Le jeu n’est **pas équitable** ; il le serait si le gain valait 8 € ($100 \times 8 = 800$).

Réponse. a) 24 issues, scores de 2 à 10 — b) $\frac{1}{6}$ — c) $\frac{1}{4}$ — d) non : perte d’environ 0,50 € par partie (il faudrait recevoir 8 €).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).