

Plaquette 2 – Expériences à deux épreuves : arbres et tableaux

Probabilités (introduction) — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Dénombrer les issues. Si la première épreuve a p issues et la seconde q issues :
 nombre total d'issues = $p \times q$

Situation	Nombre d'issues
deux lancers d'une pièce	$2 \times 2 = 4$
trois lancers d'une pièce	$2 \times 2 \times 2 = 8$
deux lancers d'un dé	$6 \times 6 = 36$
une pièce puis un dé	$2 \times 6 = 12$
deux tirages avec remise parmi n	$n \times n$
deux tirages sans remise parmi n	$n \times (n - 1)$

Probabilité dans un cas équiprobable.

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues de } A}{\text{nombre total d'issues}}$$

Arbre pondéré. On écrit la probabilité sur chaque branche, puis :

- on **multiplie** le long d'un chemin pour obtenir la probabilité de ce chemin ;
- on **additionne** les chemins qui réalisent l'événement cherché ;
- la somme de **tous** les chemins vaut 1 — c'est le contrôle final.

Avec ou sans remise. Avec remise, la composition de l'urne est la même aux deux tirages. Sans remise, il y a un objet de moins, et un de moins de la couleur sortie.

Événement contraire. Pour « au moins un... », on passe presque toujours par le contraire :

$$P(\text{au moins un}) = 1 - P(\text{aucun})$$

Correction de l'exercice 1 – Deux lancers d'une pièce

- **Issues** : $(P; P), (P; F), (F; P), (F; F)$ ✓
- **Nombre d'issues** : $2 \times 2 = 4$ ✓
- **Équiprobabilité** : la pièce est équilibrée et les lancers indépendants, donc chaque issue a la probabilité $\frac{1}{4}$ ✓
- **Exactement un pile** : $(P; F)$ et $(F; P)$ ✓
- **Probabilité** :

$$P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

- **Piège classique** : croire que les trois cas « deux piles », « un pile », « deux faces » sont équiprobables ✓
- **Correction du piège** : « un pile » se réalise de **deux** façons, les autres d'une seule ✓
- **Deux piles** : $\frac{1}{4}$ ✓

- **Deux faces** : $\frac{1}{4}$ ✓
 - **Contrôle** : $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$ ✓
 - **Au moins un pile** : $1 - P(\text{aucun pile}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ✓
 - **Vérification directe** : 3 issues sur 4 contiennent au moins un pile ✓
- Réponse.** 4 issues et $P(\text{exactement un pile}) = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 2 - Trois lancers d'une pièce

- **Nombre d'issues** : $2^3 = 8$ ✓
- **Liste** : PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF ✓
- **Contrôle** : 8 issues listées ✓
- **Exactement deux piles** : PPF, PFP, FPP ✓
- **Probabilité** :

$$P = \frac{3}{8}$$

- **Au moins un pile** : le contraire est FFF, de probabilité $\frac{1}{8}$ ✓
- **Donc** :

$$P(\text{au moins un pile}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

- **Vérification directe** : 7 issues sur 8 ✓
- **Répartition complète** : 0 pile : $\frac{1}{8}$; 1 pile : $\frac{3}{8}$; 2 piles : $\frac{3}{8}$; 3 piles : $\frac{1}{8}$ ✓
- **Contrôle** : $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$ ✓
- **Symétrie** : la loi est symétrique, car pile et face jouent le même rôle ✓
- **Cas le plus probable** : 1 ou 2 piles, avec $\frac{3}{8}$ chacun ✓
- **Valeur numérique** : $\frac{3}{8} = 0,375$ et $\frac{7}{8} = 0,875$ ✓

Réponse. $P(\text{exactement deux piles}) = \frac{3}{8}$ et $P(\text{au moins un pile}) = \frac{7}{8}$.

Correction de l'exercice 3 - Deux tirages avec remise

- **Composition** : 5 boules, dont 3 rouges ✓
- **Probabilité d'une rouge à chaque tirage** : $\frac{3}{5}$, la même aux deux tirages puisqu'il y a remise ✓
- **Deux rouges** :

$$P = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25} = 0,36$$

- **Deux vertes** : $\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25} = 0,16$ ✓
- **Exactement une rouge** : deux chemins, « rouge puis verte » et « verte puis rouge » ✓
- **Chaque chemin** : $\frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$ ✓
- **Donc** :

$$P(\text{exactement une rouge}) = 2 \times \frac{6}{25} = \frac{12}{25} = 0,48$$

- **Contrôle** : $\frac{9}{25} + \frac{12}{25} + \frac{4}{25} = \frac{25}{25} = 1$ ✓
- **Dénombrement direct** : $5 \times 5 = 25$ couples équiprobables ✓
- **Contrôle** : $3 \times 3 = 9$ couples de rouges ✓
- **Au moins une rouge** : $1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25} = 0,84$ ✓
- **Vérification** : $\frac{9}{25} + \frac{12}{25} = \frac{21}{25}$ ✓
- **Cas le plus probable** : « exactement une rouge », avec 0,48 ✓

Réponse. $P(\text{deux rouges}) = \frac{9}{25}$ et $P(\text{exactement une rouge}) = \frac{12}{25}$.

Correction de l'exercice 4 - Deux tirages sans remise

- **Nombre d'issues** : $5 \times 4 = 20$ couples ordonnés ✓
 - **Deux rouges** : 3 choix puis 2 choix, soit $3 \times 2 = 6$ couples ✓
 - **Probabilité** :
- $$P = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0,3$$
- **Deux vertes** : $\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1$ ✓
 - **Composition après une rouge** : 2 rouges et 2 vertes, sur 4 boules ✓
 - **Composition après une verte** : 3 rouges et 1 verte, sur 4 boules ✓
 - **Rouge puis verte** : $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$ ✓
 - **Verte puis rouge** : $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$ ✓
 - **Coïncidence numérique** : ces deux chemins valent aussi $\frac{6}{20}$ comme « deux rouges »
— il faut donc bien distinguer les **compositions** intermédiaires et non les seules fractions ✓
 - **Total** :

$$P(\text{exactement une rouge}) = \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0,6$$

- **Contrôle** : $\frac{6}{20} + \frac{12}{20} + \frac{2}{20} = \frac{20}{20} = 1$ ✓
- **Comparaison avec remise** : 0,3 contre 0,36 pour deux rouges ✓
- **Explication** : sans remise, une rouge déjà sortie rend la seconde **moins** probable ✓
- **Effet inverse** : « une de chaque » passe de 0,48 à 0,6 ✓
- **Règle générale** : le tirage sans remise **favorise la diversité** des résultats ✓
- **Contrôle du dénombrement** : $6 + 12 + 2 = 20$ couples ✓

Réponse. $P(\text{deux rouges}) = \frac{3}{10}$ et $P(\text{exactement une rouge}) = \frac{3}{5}$ — la diversité est favorisée.

Correction de l'exercice 5 - Somme de deux dés

- **Nombre d'issues** : $6 \times 6 = 36$, toutes équiprobables ✓
- **Somme égale à 7** : (1 ; 6), (2 ; 5), (3 ; 4), (4 ; 3), (5 ; 2), (6 ; 1) ✓
- **Comptage** : 6 issues ✓
- **Probabilité** :

$$P(S = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

- **Somme** ≥ 10 : somme 10 : (4 ; 6), (5 ; 5), (6 ; 4), soit 3 issues ✓
- **Somme** 11 : (5 ; 6), (6 ; 5), soit 2 issues ✓
- **Somme** 12 : (6 ; 6), soit 1 issue ✓
- **Total** : $3 + 2 + 1 = 6$ issues ✓
- **Probabilité** :

$$P(S \geq 10) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

- **Coïncidence intéressante** : les deux probabilités sont égales ✓
- **Somme la plus probable** : 7, avec 6 issues ✓
- **Somme la moins probable** : 2 ou 12, avec 1 issue chacune ✓
- **Contrôle global** : les effectifs par somme sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 5 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1, de total 36 ✓
- **Somme paire** : $2 + 4 + 6 + \dots$, on compte 18 issues, donc $\frac{1}{2}$ ✓

Réponse. $P(S = 7) = \frac{1}{6}$ et $P(S \geq 10) = \frac{1}{6}$.

Correction de l'exercice 6 - Produit de deux dés

- **Difficulté directe** : les produits pairs sont très nombreux, le dénombrement direct est pénible ✓
- **Stratégie** : passer par l'événement contraire, « le produit est impair » ✓
- **Condition d'un produit impair** : les **deux** résultats doivent être impairs ✓
- **Résultats impairs d'un dé** : 1, 3, 5, soit 3 possibilités ✓
- **Couples impairs** : $3 \times 3 = 9$ ✓
- **Probabilité du contraire** : $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ ✓
- **Probabilité cherchée** :

$$P(\text{produit pair}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

- **Vérification** : $36 - 9 = 27$ couples donnent un produit pair, et $\frac{27}{36} = \frac{3}{4}$ ✓
- **Lecture** : il suffit qu'un **seul** dé soit pair ✓
- **Contrôle par un autre chemin** : $P(\text{au moins un pair}) = 1 - P(\text{les deux impairs})$ ✓
- **Produit divisible par 3** : le contraire est « aucun multiple de 3 », soit $4 \times 4 = 16$ couples ✓
- **Donc** : $1 - \frac{16}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$ ✓
- **Produit multiple de 6** : il faut un facteur 2 et un facteur 3 ; on dénombre 15 couples, donc $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ ✓
- **Méthode retenue** : devant un « au moins un », le passage au contraire est presque toujours le plus court ✓

Réponse. $P(\text{produit pair}) = 1 - \frac{9}{36} = \frac{3}{4}$.

Correction de l'exercice 7 - Maximum de deux dés

- **Maximum au plus égal à 4** : les **deux** dés doivent donner au plus 4 ✓
- **Comptage** : $4 \times 4 = 16$ couples ✓
- **Probabilité** :

$$P(\max \leq 4) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

- **Maximum au plus égal à 3** : $3 \times 3 = 9$ couples, soit $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ ✓
- **Maximum égal à 4** : c'est la différence des deux événements précédents ✓
- **Comptage** : $16 - 9 = 7$ couples ✓
- **Probabilité** :

$$P(\max = 4) = \frac{7}{36}$$

- **Liste de contrôle** : (4; 1), (4; 2), (4; 3), (4; 4), (1; 4), (2; 4), (3; 4) ✓
- **Comptage de la liste** : 7 couples ✓
- **Loi du maximum** : $\frac{1}{36}$; $\frac{3}{36}$; $\frac{5}{36}$; $\frac{7}{36}$; $\frac{9}{36}$; $\frac{11}{36}$ ✓
- **Contrôle** : $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$ ✓
- **Structure remarquable** : les effectifs sont les **nombre impairs** successifs ✓
- **Explication** : $P(\max = k) = \frac{k^2 - (k-1)^2}{36} = \frac{2k-1}{36}$ ✓
- **Valeur la plus probable** : $\max = 6$, avec $\frac{11}{36} \approx 0,306$ ✓

Réponse. $P(\max = 4) = \frac{7}{36}$ et $P(\max \leq 4) = \frac{4}{9}$.

Correction de l'exercice 8 - Une pièce puis un dé

- **Nombre d'issues** : $2 \times 6 = 12$, équiprobables ✓
- **Pile et résultat** > 4 : les issues (P; 5) et (P; 6) ✓
- **Probabilité** :

$$P = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

- **Contrôle par produit** : $\frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ ✓
- **Face ou un 6** : on utilise la formule de la réunion ✓
- $P(\text{face})$: $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ ✓
- $P(6)$: $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, car le 6 peut accompagner pile ou face ✓
- **Intersection** : l'issue (F; 6) seule, soit $\frac{1}{12}$ ✓
- **Formule** :

$$P(F \cup 6) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{6}{12} + \frac{2}{12} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$

- **Vérification par dénombrement** : les 6 issues avec face, plus (P; 6), soit 7 issues ✓
- **Piège** : oublier de retirer l'intersection donnerait $\frac{8}{12}$, soit une issue comptée deux fois ✓
- **Contraire** : « pile et résultat ≤ 5 », soit 5 issues, donc $\frac{5}{12}$ ✓
- **Contrôle** : $\frac{7}{12} + \frac{5}{12} = 1$ ✓

Réponse. $P(\text{pile et } > 4) = \frac{1}{6}$ et $P(\text{face ou } 6) = \frac{7}{12}$.

Correction de l'exercice 9 - Arbre pondéré avec remise

- **Probabilités d'un tirage** : $P(B) = 0,7$ et $P(N) = 0,3$ ✓
- **Contrôle** : $0,7 + 0,3 = 1$ ✓
- **Chemin BB** : $0,7 \times 0,7 = 0,49$ ✓
- **Chemin BN** : $0,7 \times 0,3 = 0,21$ ✓
- **Chemin NB** : $0,3 \times 0,7 = 0,21$ ✓
- **Chemin NN** : $0,3 \times 0,3 = 0,09$ ✓
- **Contrôle de l'arbre** : $0,49 + 0,21 + 0,21 + 0,09 = 1$ ✓
- **Aucune noire** : $0,49$ ✓
- **Exactement une noire** : $0,21 + 0,21 = 0,42$ ✓
- **Deux noires** : $0,09$ ✓
- **Loi** : $P(0) = 0,49$; $P(1) = 0,42$; $P(2) = 0,09$ ✓
- **Contrôle** : $0,49 + 0,42 + 0,09 = 1$ ✓
- **Au moins une noire** : $1 - 0,49 = 0,51$ ✓
- **Nombre moyen de noires** : $0 \times 0,49 + 1 \times 0,42 + 2 \times 0,09 = 0,60$ ✓
- **Contrôle intuitif** : 2 tirages à 0,3 donnent bien $2 \times 0,3 = 0,6$ noire en moyenne ✓

Réponse. $P(0) = 0,49$; $P(1) = 0,42$; $P(2) = 0,09$ (et 0,6 noire en moyenne).

Correction de l'exercice 10 - Arbre pondéré sans remise

- **Premier tirage** : $P(B) = \frac{7}{10}$ et $P(N) = \frac{3}{10}$ ✓
- **Après une blanche** : il reste 6 blanches et 3 noires sur 9 ✓
- **Après une noire** : il reste 7 blanches et 2 noires sur 9 ✓
- **Chemin BB** : $\frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$ ✓
- **Chemin BN** : $\frac{7}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{21}{90}$ ✓
- **Chemin NB** : $\frac{3}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{21}{90}$ ✓
- **Chemin NN** : $\frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$ ✓
- **Contrôle de l'arbre** : $\frac{42 + 21 + 21 + 6}{90} = \frac{90}{90} = 1$ ✓
- **Loi** : $P(0) = \frac{42}{90} \approx 0,467$; $P(1) = \frac{42}{90} \approx 0,467$; $P(2) = \frac{6}{90} \approx 0,067$ ✓
- **Comparaison pour deux noires** : 0,067 sans remise contre 0,09 avec remise ✓
- **Comparaison pour une seule noire** : 0,467 contre 0,42 ✓
- **Interprétation** : sans remise, les résultats **mélangés** deviennent plus probables ✓
- **Nombre moyen de noires** : $0 \times \frac{42}{90} + 1 \times \frac{42}{90} + 2 \times \frac{6}{90} = \frac{54}{90} = 0,6$ ✓
- **Observation remarquable** : la moyenne est la **même** dans les deux cas ✓
- **Leçon** : la remise change la **dispersion** des résultats, pas leur moyenne ✓

Réponse. $P(0) = P(1) = \frac{42}{90} \approx 0,467$ et $P(2) = \frac{6}{90} \approx 0,067$; même moyenne 0,6 qu'avec remise.

Correction de l'exercice 11 - Trois enfants

- **Modèle** : 8 issues équiprobables, chacune de probabilité $\frac{1}{8}$ ✓
- **Au moins une fille** : le contraire est « trois garçons », une seule issue ✓

— **Probabilité :**

$$P(\text{au moins une fille}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0,875$$

— **Exactement deux filles :** *FFG, FGF, GFF* ✓— **Probabilité :** $\frac{3}{8} = 0,375$ ✓— **Loi complète :** $P(0) = \frac{1}{8}$; $P(1) = \frac{3}{8}$; $P(2) = \frac{3}{8}$; $P(3) = \frac{1}{8}$ ✓— **Contrôle :** la somme vaut 1 ✓— **Piège fréquent :** penser que « deux filles et un garçon » vaut $\frac{1}{4}$ parce qu'il y a quatre répartitions possibles ✓— **Correction :** les quatre répartitions (0, 1, 2, 3 filles) ne sont **pas** équiprobables ✓— **Autant de filles que de garçons :** impossible avec 3 enfants, donc probabilité 0 ✓— **Enfants de même sexe :** $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ ✓— **Limite du modèle :** à la naissance, le taux réel de garçons est d'environ 51,2 %, pas 50 % ✓— **Ordre de grandeur de l'écart :** avec 0,512, « trois garçons » vaudrait $0,512^3 \approx 0,134$ au lieu de 0,125 ✓

Réponse. $P(\text{au moins une fille}) = \frac{7}{8}$ et $P(\text{exactement deux filles}) = \frac{3}{8}$.

Correction de l'exercice 12 - Code à deux chiffres— **Nombre de codes :** $10 \times 10 = 100$ ✓— **Codes à chiffres identiques :** 00, 11, ..., 99, soit 10 codes ✓— **Probabilité :**

$$P = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0,1$$

— **Somme égale à 9 :** 09, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90 ✓— **Comptage :** 10 codes ✓— **Probabilité :** $\frac{10}{100} = 0,1$ ✓— **Contrôle :** pour chaque premier chiffre de 0 à 9, le second est imposé ✓— **Comparaison :** pour une somme de 5, on ne trouve que 6 codes (05, 14, 23, 32, 41, 50), soit 0,06 ✓— **Explication :** au-delà de 9, la contrainte « second chiffre ≤ 9 » élimine des possibilités, mais pour une somme de 9 exactement toutes passent ✓— **Somme maximale :** 18, avec le seul code 99, soit 0,01 ✓— **Chiffres distincts :** $1 - 0,1 = 0,9$ ✓— **Contrôle :** $10 \times 9 = 90$ codes à chiffres distincts ✓— **Sécurité du cadenas :** un essai au hasard réussit avec une probabilité de $\frac{1}{100} = 1\%$ ✓— **Nombre d'essais pour tout tester :** 100, soit quelques minutes — d'où les codes à 4 chiffres, qui en demandent 10 000 ✓

Réponse. $P(\text{chiffres identiques}) = 0,1$ et $P(\text{somme} = 9) = 0,1$.

Correction de l'exercice 13 - Deux dés à quatre faces— **Nombre d'issues :** $4 \times 4 = 16$ ✓

+	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

- **Effectifs par somme** : 2 : 1 ; 3 : 2 ; 4 : 3 ; 5 : 4 ; 6 : 3 ; 7 : 2 ; 8 : 1 ✓
 - **Contrôle** : $1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16$ ✓
 - **Loi** : $\frac{1}{16} ; \frac{2}{16} ; \frac{3}{16} ; \frac{4}{16} ; \frac{3}{16} ; \frac{2}{16} ; \frac{1}{16}$ ✓
 - **Somme la plus probable** : 5, avec $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ ✓
 - **Symétrie** : la loi est symétrique autour de 5 ✓
 - **Somme paire** : 2, 4, 6, 8, soit $1 + 3 + 3 + 1 = 8$ issues, donc $\frac{1}{2}$ ✓
 - **Somme au moins égale à 6** : $3 + 2 + 1 = 6$ issues, donc $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ ✓
 - **Somme moyenne** : $\frac{1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + 3 \times 6 + 2 \times 7 + 1 \times 8}{16} = \frac{80}{16} = 5$ ✓
 - **Contrôle intuitif** : chaque dé vaut 2,5 en moyenne, donc la somme vaut 5 ✓
 - **Comparaison avec les dés à six faces** : la somme la plus probable y est 7, et la moyenne aussi ✓
 - **Règle** : pour deux dés à n faces, la somme la plus probable est $n + 1$ ✓
- Réponse.** Loi symétrique autour de 5 : $\frac{1}{16} ; \frac{2}{16} ; \frac{3}{16} ; \frac{4}{16} ; \frac{3}{16} ; \frac{2}{16} ; \frac{1}{16}$.

Correction de l'exercice 14 - Deux roues de loterie

- **Nombre d'issues** : $3 \times 4 = 12$, équiprobables ✓
- **Obtenir A** : les issues A1, A2, A3, A4, soit 4 ✓
- **Probabilité** :

$$P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$
- **Contrôle** : la lettre ne dépend que de la première roue, qui a 3 secteurs égaux ✓
- **A et numéro pair** : les issues A2 et A4 ✓
- **Probabilité** :

$$P = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$
- **Contrôle par produit** : $\frac{1}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ ✓
- **A ou numéro pair** : $P(A) + P(\text{pair}) - P(A \text{ et pair})$ ✓
- **Calcul** : $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ✓
- **Vérification par dénombrement** : A1, A2, A3, A4, B2, B4, C2, C4, soit 8 issues sur 12 ✓
- **Contrôle** : $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ ✓
- **Ni A ni pair** : B1, B3, C1, C3, soit $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ ✓
- **Contrôle** : $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ ✓

— **Remarque** : les deux roues sont **indépendantes**, d'où la multiplication des probabilités ✓

Réponse. $P(A) = \frac{1}{3}$ et $P(A \text{ et pair}) = \frac{1}{6}$.

Correction de l'exercice 15 - Deux tirages dans un jeu de cartes

— **Composition** : 32 cartes, dont 8 cœurs ✓

— **Premier tirage** : $P(\text{cœur}) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ ✓

— **Second tirage après un cœur** : il reste 7 cœurs sur 31 cartes ✓

— **Deux cœurs** :

$$P = \frac{8}{32} \times \frac{7}{31} = \frac{56}{992} = \frac{7}{124} \approx 0,0565$$

— **Contrôle de la simplification** : $\frac{56}{992}$ se divise par 8, ce qui donne $\frac{7}{124}$ ✓

— **Aucun cœur** : $\frac{24}{32} \times \frac{23}{31} = \frac{552}{992} = \frac{69}{124} \approx 0,5565$ ✓

— **Au moins un cœur** :

$$P = 1 - \frac{69}{124} = \frac{55}{124} \approx 0,4435$$

— **Exactement un cœur** : $\frac{55}{124} - \frac{7}{124} = \frac{48}{124} = \frac{12}{31} \approx 0,387$ ✓

— **Contrôle de l'arbre** : $\frac{7}{124} + \frac{48}{124} + \frac{69}{124} = \frac{124}{124} = 1$ ✓

— **Comparaison avec remise** : on aurait $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} = 0,0625$ pour deux cœurs ✓

— **Écart** : 0,0565 contre 0,0625, le tirage sans remise est légèrement moins favorable ✓

— **Ordre de grandeur de l'écart** : environ 10 % en relatif ✓

— **Explication** : avec 32 cartes, retirer une carte modifie peu les proportions ✓

— **Contraste avec une urne de 5 boules** : l'effet y était beaucoup plus marqué ✓

Réponse. $P(\text{deux cœurs}) = \frac{7}{124} \approx 0,057$ et $P(\text{au moins un cœur}) = \frac{55}{124} \approx 0,444$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un jeu de dés et de jetons

a) **Nombre d'issues** : $4 \times 6 = 24$, équiprobables ✓

— **Score minimal** : $1 + 1 = 2$ ✓

— **Score maximal** : $4 + 6 = 10$ ✓

— **Scores possibles** : tous les entiers de 2 à 10 ✓

b) **Score égal à 5** : les couples (1 ; 4), (2 ; 3), (3 ; 2), (4 ; 1) ✓

— **Comptage** : 4 issues ✓

— **Probabilité** :

$$P(S = 5) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

c) **Dénombrement par jeton** ✓

— **Jeton 1** : il faut un dé ≥ 7 , donc **aucune** issue ✓

— **Jeton 2** : dé ≥ 6 , soit 1 issue ✓

— **Jeton 3** : dé ≥ 5 , soit 2 issues ✓

— **Jeton 4** : dé ≥ 4 , soit 3 issues ✓

— **Total** : $0 + 1 + 2 + 3 = 6$ issues ✓

— **Probabilité :**

$$P(S \geq 8) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

d) **Analyse du jeu** ✓— **Probabilité de gagner** : $\frac{1}{4}$ ✓— **Probabilité de perdre** : $\frac{3}{4}$ ✓— **Gain net en cas de victoire** : $6 - 2 = 4$ € ✓— **Perte en cas d'échec** : -2 € ✓— **Gain moyen par partie** :

$$4 \times \frac{1}{4} + (-2) \times \frac{3}{4} = 1 - 1,5 = -0,5 \text{ €}$$

— **Conclusion** : le jeu **n'est pas équitable**, il est défavorable au joueur ✓— **Perte moyenne** : 0,50 € par partie, soit un quart de la mise ✓— **Sur 100 parties** : environ 50 € de perte ✓— **Gain qui rendrait le jeu équitable** : il faut g tel que $(g - 2) \times \frac{1}{4} - 2 \times \frac{3}{4} = 0$, soit $g - 2 = 6$ et $g = 8$ € ✓— **Vérification** : $6 \times \frac{1}{4} - 2 \times \frac{3}{4} = 1,5 - 1,5 = 0$ ✓— **Autre réglage possible** : abaisser le seuil de victoire à 7 ferait passer la probabilité à $\frac{10}{24} \approx 0,417$ ✓— **Contrôle** : le gain moyen deviendrait $4 \times \frac{10}{24} - 2 \times \frac{14}{24} \approx 1,67 - 1,17 = 0,50$ € — favorable au joueur cette fois ✓

Réponse. a) 24 issues, scores de 2 à 10 · b) $\frac{1}{6}$ · c) $\frac{1}{4}$ · d) non : le gain moyen vaut $-0,50$ € par partie (il faudrait 8 € de gain).