Plaquette 3 – Réunion, intersection, contraire : la formule et ses pièges

Probabilités (introduction) — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Vocabulaire des événements.

Français	Écriture	Sens
A **et** B	$A \cap B$	les deux se produisent
A **ou** B	$A \cup B$	au moins l'un des deux
non A	$\overline{A}$	A ne se produit pas
A et B **incompatibles**	$A \cap B = \varnothing$	ils ne peuvent coexister

Les deux formules essentielles.

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Si A et B sont incompatibles, $P(A \cap B) = 0$ et la formule se simplifie en $P(A) + P(B)$.

Traductions à connaître par cœur.

Énoncé	Événement
« au moins un des deux »	$A \cup B$
« aucun des deux »	$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$
« exactement un des deux »	$A \cup B$ privé de $A \cap B$
« les deux »	$A \cap B$

D'où :

$$P(\text{aucun}) = 1 - P(A \cup B) \qquad P(\text{exactement un}) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$$

Attention au « ou » du français. En mathématiques, « A ou B » est **inclusif** : il autorise les deux. Le « ou bien » exclusif du langage courant correspond à « exactement un des deux ».

Contrôles de validité. Toute probabilité est dans $[0\,;1]$, et l'on a toujours

$$P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B) \leq 1$$

Correction de l'exercice 1 – Appliquer la formule de la réunion

Réunion. On applique la formule, en retirant l'intersection comptée deux fois :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}7$$

Contraire de A.

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$

Aucun des deux. « Ni A ni B » est le contraire de « A ou B » :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$P(\text{aucun}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$$

Réponse. $P(A \cup B) = 0{,}7$, $P\left(\overline{A}\right) = 0{,}5$ et $P(\text{aucun}) = 0{,}3$.

Correction de l'exercice 2 – Retrouver l'intersection

On isole $P(A \cap B)$ dans la formule de la réunion :

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}45 - 0{,}85 = 0{,}2$$

Contrôle. 0,2 est bien inférieur à $P(A)$ et à $P(B)$: une intersection ne peut pas être plus probable que chacun des deux événements.

Réponse. $P(A \cap B) = 0{,}2$.

Correction de l'exercice 3 – Événements incompatibles

$A = \{1\,;2\}$ et $B = \{5\,;6\}$ n'ont aucune issue commune : $A \cap B = \varnothing$, les événements sont **incompatibles**.

La formule de la réunion se réduit alors à une somme :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Contrôle. $A \cup B = \{1\,;2\,;5\,;6\}$ compte bien 4 issues sur 6.

Réponse. Oui, incompatibles, et $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$.

Correction de l'exercice 4 – Jeu de 52 cartes

Le jeu compte 4 rois et 13 cœurs ; le roi de cœur est dans les deux.

$$P(R) = \frac{4}{52} \qquad P(C) = \frac{13}{52} \qquad P(R \cap C) = \frac{1}{52}$$

$$P(R \cup C) = \frac{4 + 13 - 1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13} \approx 0{,}308$$

Piège. Additionner $4 + 13 = 17$ compterait deux fois le roi de cœur.

Réponse. $P(R \cup C) = \frac{4}{13} \approx 0{,}308$.

Correction de l'exercice 5 – Du langage courant aux événements

On note L : « fait du latin » et G : « fait du grec ».

— **Au moins une** : $P(L \cup G) = 0{,}25 + 0{,}15 - 0{,}05 = 0{,}35$.
— **Aucune** : contraire de la précédente, $1 - 0{,}35 = 0{,}65$.
— **Exactement une** : on retire de la réunion ceux qui font les deux, $0{,}35 - 0{,}05 = 0{,}30$.
— **Seulement le latin** : on retire du latin ceux qui font aussi du grec, $0{,}25 - 0{,}05 = 0{,}20$.

Contrôle. Latin seul 0,20 + grec seul 0,10 + les deux 0,05 + aucune 0,65 = 1.

Réponse. Au moins une : 0,35 — aucune : 0,65 — exactement une : 0,30 — latin seul : 0,20.

Correction de l'exercice 6 – Tableau à double entrée

On complète d'abord les totaux du tableau.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

	Sportif	Non sportif	Total
Fumeur	18	42	60
Non fumeur	92	48	140
Total	110	90	200

— $P(S) = \dfrac{110}{200} = 0{,}55$ et $P(F) = \dfrac{60}{200} = 0{,}30$.

— $P(S \cap F) = \dfrac{18}{200} = 0{,}09$.

— $P(S \cup F) = 0{,}55 + 0{,}30 - 0{,}09 = 0{,}76$.

Contrôle. $S \cup F$ regroupe toutes les cases sauf « non fumeur et non sportif » : $\dfrac{200 - 48}{200} = 0{,}76$.

Réponse. $P(S) = 0{,}55$; $P(F) = 0{,}30$; $P(S \cap F) = 0{,}09$; $P(S \cup F) = 0{,}76$.

Correction de l’exercice 7 – Compléter un tableau

On part de l’intersection, puis on complète.

	Scooter	Pas de scooter	Total
Vélo	25	65	90
Pas de vélo	35	25	60
Total	60	90	150

— Vélo seul : $90 - 25 = 65$; scooter seul : $60 - 25 = 35$.

— Aucun des deux : $150 - (65 + 35 + 25) = 25$.

Au moins un des deux : $65 + 35 + 25 = 125$ élèves,

$$P = \frac{125}{150} = \frac{5}{6}$$

Réponse. Vélo seul 65, scooter seul 35, les deux 25, aucun 25 ; $P(\text{au moins un}) = \dfrac{5}{6}$.

Correction de l’exercice 8 – Le piège du « ou »

Les clients qui prennent **les deux** sont comptés deux fois dans $60\,\% + 50\,\%$. La bonne formule est

$$P(E \cup D) = 0{,}6 + 0{,}5 - P(E \cap D) = 1{,}1 - P(E \cap D)$$

Encadrement. Comme $P(E \cup D) \leq 1$, on a $P(E \cap D) \geq 0{,}1$: au moins $10\,\%$ des clients prennent les deux. Et $P(E \cap D) \leq 0{,}5$, car l’intersection ne dépasse pas le dessert.

Donc $P(E \cup D)$ est compris entre 0,6 et 1 ; sans connaître l’intersection, on ne peut pas être plus précis.

Réponse. $P(E \cup D) = 1{,}1 - P(E \cap D)$, avec $0{,}1 \leq P(E \cap D) \leq 0{,}5$.

Correction de l’exercice 9 – Loi de probabilité et événements

Valeur de p. La somme des probabilités vaut 1 :

$$p = 1 - (0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}25) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$$

Résultat pair (2 ou 4) :

$$P = 0{,}2 + 0{,}25 = 0{,}45$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Résultat au moins 3 (3, 4 ou 5) :

$$P = 0{,}3 + 0{,}25 + 0{,}15 = 0{,}70$$

Réponse. $p = 0{,}15$; $P(\text{pair}) = 0{,}45$ et $P(\text{résultat} \geq 3) = 0{,}70$.

Correction de l'exercice 10 – Trois événements

Le jeu de 32 cartes compte 8 piques, 4 rois et 12 figures.

$A \cup B$: le roi de pique est à la fois pique et roi.

$$P(A \cup B) = \frac{8 + 4 - 1}{32} = \frac{11}{32}$$

$B \cap C$: tout roi est une figure, donc $B \cap C = B$:

$$P(B \cap C) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

$\overline{C}$: les $32 - 12 = 20$ cartes qui ne sont pas des figures :

$$P\left(\overline{C}\right) = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$$

Réponse. $P(A \cup B) = \frac{11}{32}$, $P(B \cap C) = \frac{1}{8}$ et $P\left(\overline{C}\right) = \frac{5}{8}$.

Correction de l'exercice 11 – Encadrer une intersection

Intersection. Elle ne dépasse ni $P(A)$ ni $P(B)$: $P(A \cap B) \leq 0{,}6$. Et comme $P(A \cup B) \leq 1$:

$$P(A \cap B) = 0{,}7 + 0{,}6 - P(A \cup B) \geq 1{,}3 - 1 = 0{,}3$$

Réunion. Elle contient A, donc $P(A \cup B) \geq 0{,}7$, et elle reste inférieure ou égale à 1.

$$0{,}3 \leq P(A \cap B) \leq 0{,}6 \qquad 0{,}7 \leq P(A \cup B) \leq 1$$

Conséquence. $P(A \cap B) \geq 0{,}3 > 0$: A et B ne peuvent pas être incompatibles.

Réponse. $0{,}3 \leq P(A \cap B) \leq 0{,}6$ et $0{,}7 \leq P(A \cup B) \leq 1$.

Correction de l'exercice 12 – Deux dés et deux événements

On raisonne sur les 36 couples équiprobables.

— A (somme paire) : les deux dés sont de même parité, $3 \times 3 + 3 \times 3 = 18$ couples, $P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

— B (au moins un 6) : contraire de « aucun 6 », $36 - 5 \times 5 = 11$ couples, $P(B) = \frac{11}{36}$.

— $A \cap B$: un 6 et l'autre dé pair, $(6\,;2)$, $(6\,;4)$, $(6\,;6)$, $(2\,;6)$, $(4\,;6)$, soit $P(A \cap B) = \frac{5}{36}$.

$$P(A \cup B) = \frac{18 + 11 - 5}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

Réponse. $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{11}{36}$, $P(A \cap B) = \frac{5}{36}$ et $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$.

Correction de l'exercice 13 – Sondage sur deux langues

On note A : « anglais » et E : « espagnol ».

Au moins une langue :

$$320 + 180 - 110 = 390 \text{ élèves}$$

Aucune : $500 - 390 = 110$ élèves, soit $P = \frac{110}{500} = 0{,}22$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exactement une : anglais seul $320 - 110 = 210$, espagnol seul $180 - 110 = 70$, soit 280 élèves :

$$P = \frac{280}{500} = 0{,}56$$

Contrôle. $210 + 70 + 110 + 110 = 500$.

Réponse. Aucune : 0,22 — exactement une : 0,56.

Correction de l'exercice 14 – Événement contraire et « au moins »

Quatre lancers donnent $2^4 = 16$ issues équiprobables.

Au moins un pile : le contraire est *FFFF*, une seule issue :

$$P = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

Au moins deux piles : le contraire est « 0 ou 1 pile ». Il y a 1 issue sans pile et 4 issues avec un seul pile (*PFFF*, *FPFF*, *FFPF*, *FFFP*) :

$$P = 1 - \frac{1+4}{16} = \frac{11}{16}$$

Réponse. P(au moins un pile) $= \frac{15}{16}$ et P(au moins deux piles) $= \frac{11}{16}$.

Correction de l'exercice 15 – Vrai ou faux

a) **Faux** : $P(A \cup B) = 0{,}9 - P(A \cap B)$, ce qui ne vaut 0,9 que si A et B sont incompatibles.

b) **Vrai** : si A et B sont incompatibles, $P(A) + P(B) = P(A \cup B) \leq 1$.

c) **Vrai** dans le cadre habituel où chaque issue a une probabilité non nulle (par exemple l'équiprobabilité) : l'égalité impose $P(A \cap B) = 0$, donc $A \cap B$ ne contient aucune issue.

d) **Vrai** : A et $\overline{A}$ ne peuvent pas se produire ensemble. La réciproque est fausse : au dé, $\{1\}$ et $\{2\}$ sont incompatibles sans être contraires.

Réponse. a) faux — b) vrai — c) vrai (issues de probabilité non nulle) — d) vrai, réciproque fausse.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : contrôle qualité de deux défauts

On note E : « défaut d'écran » et B : « défaut de batterie ».

a) Au moins un défaut :

$$P(E \cup B) = 0{,}06 + 0{,}04 - 0{,}015 = 0{,}085$$

b) Tablette parfaite : $1 - 0{,}085 = 0{,}915$.

c) Exactement un défaut : $0{,}085 - 0{,}015 = 0{,}070$.

d) Sur 8000 tablettes :

— seules les tablettes à deux défauts : $8000 \times 0{,}015 = 120$ retours ;
— tout défaut : $8000 \times 0{,}085 = 680$ retours.

Réponse. a) 0,085 — b) 0,915 — c) 0,070 — d) 120 retours contre 680.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).