# Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : jeux, paris et décisions

## Probabilités (introduction) — Seconde

Corrections détaillées

**Boîte à outils**

**Bilan sur un grand nombre de parties.** Si un événement a la probabilité $p$, il se produit environ $N \times p$ fois sur $N$ parties. On fait alors les comptes : sommes reçues moins mises.

| Bilan sur $N$ parties | Interprétation |
|---|---|
| bénéfice pour le joueur | jeu favorable au joueur |
| bilan nul | jeu **équitable** |
| perte pour le joueur | jeu favorable à l'organisateur |

On divise le bilan par $N$ pour obtenir le gain (ou la perte) **moyen par partie**.

**Toutes les formules utiles réunies.**

$$P(A) = \frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}} \qquad P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Le long d'un chemin d'arbre on **multiplie**, entre chemins on **additionne**.

**Trois intuitions fausses à démonter.**

— « J'ai eu cinq faces de suite, donc pile est plus probable maintenant » — faux, les lancers sont indépendants.

— « Il y a trois résultats possibles, donc chacun vaut $\frac{1}{3}$ » — faux si les issues ne sont pas équiprobables.

— « Une chance sur $n$ signifie qu'en $n$ essais je gagne » — faux, la probabilité de gagner au moins une fois en $n$ essais vaut $1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$, soit environ 63 % pour $n$ grand.

**Méthode de décision.** Calculer, puis **comparer**, puis répondre en une phrase de contexte — jamais par un nombre seul.

## Correction de l'exercice 1 – Un jeu de dé est-il équitable ?

On fait le bilan sur un grand nombre de parties, par exemple 600. Le 6 sort environ $\frac{1}{6}$ du temps, soit 100 fois.

— Le joueur mise $600 \times 3 = 1800$ €.

— Il reçoit environ $100 \times 15 = 1500$ €.

Il perd environ 300 €, soit 0,50 € par partie : le jeu **n'est pas équitable**, il favorise l'organisateur.

**Pour le rendre équitable**, il faut que les sommes reçues compensent les mises : recevoir $1800 \div 100 = 18$ € sur un 6, ou miser $1500 \div 600 = 2{,}50$ €.

**Réponse.** Non : perte d'environ 0,50 € par partie ; il faudrait recevoir 18 € (ou miser 2,50 €).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Correction de l'exercice 2 – Roue de fête foraine

Sur 10 secteurs égaux, pensons à 1000 parties : chaque secteur sort environ 100 fois.

— « 20 € » : 100 fois, soit 2000 € ;
— « 5 € » : 200 fois, soit 1000 € ;
— « 1 € » : 300 fois, soit 300 € ;
— « rien » : 400 fois.

Le joueur reçoit environ 3300 € et a payé $1000 \times 4 = 4000$ € : il perd environ 700 €, soit 0,70 **€ par partie** en moyenne.

**Remarque.** Le jeu serait équitable si la partie coûtait $3300 \div 1000 = 3{,}30$ €.

**Réponse.** Le joueur perd en moyenne 0,70 € par partie (jeu équitable à 3,30 €).

## Correction de l'exercice 3 – Deux stratégies au jeu du dé

**Stratégie** $A$ : $P(A) = \dfrac{1}{6} = \dfrac{6}{36}$.

**Stratégie** $B$ : deux lancers donnent 36 issues. Le contraire de « au moins un 6 » est « aucun 6 », soit $5 \times 5 = 25$ issues :

$$P(B) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

**Comparaison.** $\dfrac{11}{36} \div \dfrac{6}{36} = \dfrac{11}{6} \approx 1{,}83$ : $B$ est meilleure, mais **pas deux fois** meilleure. Doubler donnerait $\dfrac{12}{36}$ et compterait deux fois l'issue $(6\,;6)$.

**Réponse.** $P(A) = \dfrac{1}{6}$ et $P(B) = \dfrac{11}{36}$ : $B$ est environ 1,83 fois meilleure, pas deux fois.

## Correction de l'exercice 4 – Le joueur qui croit à la compensation

**L'affirmation est fausse.** La pièce n'a pas de mémoire : au sixième lancer, pile et face ont toujours chacun la probabilité $\dfrac{1}{2}$, quels que soient les résultats précédents.

**Six faces de suite.** Six lancers donnent $2^6 = 64$ issues équiprobables, dont une seule est *FFFFFF* :

$$P = \frac{1}{64} \approx 0{,}016$$

**Où est l'erreur du joueur ?** $\dfrac{1}{64}$ est la probabilité de la série **avant** de commencer. Une fois les cinq faces obtenues, seule compte la probabilité du dernier lancer, $\dfrac{1}{2}$.

**Réponse.** Faux : pile reste à $\dfrac{1}{2}$, et six faces de suite valent $\dfrac{1}{64}$.

## Correction de l'exercice 5 – Contrôle antidopage

On note $P$ : « positif » et $H$ : « haltérophile ».

— $P(P) = \dfrac{12}{200} = 0{,}06$ et $P(H) = \dfrac{40}{200} = 0{,}20$.
— $P(P \cap H) = \dfrac{9}{200} = 0{,}045$.
— $P(P \cup H) = 0{,}06 + 0{,}20 - 0{,}045 = 0{,}215$.

**Commentaire.** Parmi les haltérophiles, $\dfrac{9}{40} = 22{,}5\,\%$ sont positifs ; parmi les 160 autres

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

sportifs, $\frac{3}{160} \approx 1{,}9\,\%$. Le taux de positifs est donc environ 12 fois plus élevé en haltérophilie.

**Réponse.** $P(P) = 0{,}06$, $P(H) = 0{,}20$, $P(P \cap H) = 0{,}045$, $P(P \cup H) = 0{,}215$ ; taux de positifs 12 fois plus élevé en haltérophilie.

## Correction de l'exercice 6 – Trois portes

**Un coffre.** Le prix est dans l'un des trois coffres, chacun avec la même chance :

$$P(\text{gagner}) = \frac{1}{3}$$

**Deux coffres.** On gagne si le prix est dans l'un des deux coffres ouverts ; ces deux événements sont incompatibles (un seul prix) :

$$P = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

La probabilité **double**. On peut aussi raisonner par le contraire : on perd seulement si le prix est dans le coffre non ouvert, avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

**Réponse.** $\frac{1}{3}$ avec un coffre, $\frac{2}{3}$ avec deux.

## Correction de l'exercice 7 – Assurance et sinistres

Raisonnons sur 1000 clients.

— Primes encaissées : $1000 \times 150 = 150\,000$ €.
— Environ 4 % de sinistres, soit 40 sinistres à 2500 € : 100 000 €.

Bénéfice : environ 50 000 €, soit 50 **€ par client**.

**Prime d'équilibre** : les primes doivent couvrir les 100 000 € de sinistres, soit 100 € par client.

**Seuil de perte.** Avec une prime de 150 €, l'assureur perd dès que les sinistres dépassent 150 000 €, soit 60 sinistres pour 1000 clients : au-delà de 6 % de sinistres.

**Réponse.** Bénéfice moyen 50 € par client ; prime d'équilibre 100 € ; perte au-delà de 6 % de sinistres.

## Correction de l'exercice 8 – Deux dés contre un dé

**Jeu** $A$ : 5 ou 6, soit 2 faces sur 6 :

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

**Jeu** $B$ : somme au moins 10 : $(4;6)$, $(5;5)$, $(6;4)$, $(5;6)$, $(6;5)$, $(6;6)$, soit 6 couples sur 36 :

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

**Décision.** On choisit le jeu $A$, deux fois plus favorable. Lancer deux dés ne donne pas plus de chances : tout dépend de l'événement gagnant.

**Réponse.** $P(A) = \frac{1}{3}$ contre $P(B) = \frac{1}{6}$ : le jeu $A$.

## Correction de l'exercice 9 – Tirage au sort d'un binôme

**Nombre de binômes.** $6 \times 5 = 30$ couples ordonnés, chaque binôme compté deux fois : 15 binômes équiprobables.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

**Léa et Tom ensemble** : un seul binôme,

$$P = \frac{1}{15}$$

**Léa dans le binôme** : Léa avec l'un des 5 autres élèves, soit 5 binômes :

$$P = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

C'est logique : 2 places pour 6 élèves, chacun a $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ de chances d'être choisi.

**Réponse.** $P$(Léa et Tom) $= \frac{1}{15}$ et $P$(Léa dans le binôme) $= \frac{1}{3}$.

## Correction de l'exercice 10 – Quiz à choix multiples

À chaque question, 3 réponses possibles : $3^4 = 81$ façons de répondre, équiprobables.

**Tout bon** : une seule façon,

$$P = \frac{1}{81}$$

**Tout faux** : 2 mauvaises réponses à chaque question, soit $2^4 = 16$ façons :

$$P = \frac{16}{81}$$

**Au moins une bonne réponse** : contraire de « tout faux »,

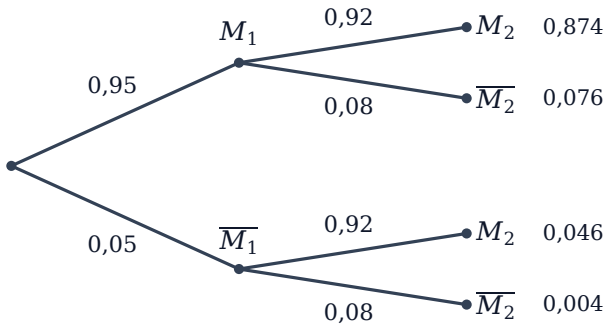
$$P = 1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81} \approx 0{,}802$$

**Réponse.** Tout bon : $\frac{1}{81}$ — tout faux : $\frac{16}{81}$ — au moins une bonne : $\frac{65}{81} \approx 0{,}802$.

## Correction de l'exercice 11 – Deux machines en série

On passe par le contraire : la chaîne **ne s'arrête pas** si les deux machines fonctionnent.

La machine 1 fonctionne 95 % des jours ; ces jours-là, la machine 2 fonctionne dans 92 % des cas (les pannes sont indépendantes). C'est une proportion de proportion : on multiplie le long du chemin.




*$M_i$ : la machine $i$ fonctionne*

$$P(\text{les deux fonctionnent}) = 0{,}95 \times 0{,}92 = 0{,}874$$

$$P(\text{arrêt}) = 1 - 0{,}874 = 0{,}126$$

La chaîne s'arrête environ 12,6 % des jours.

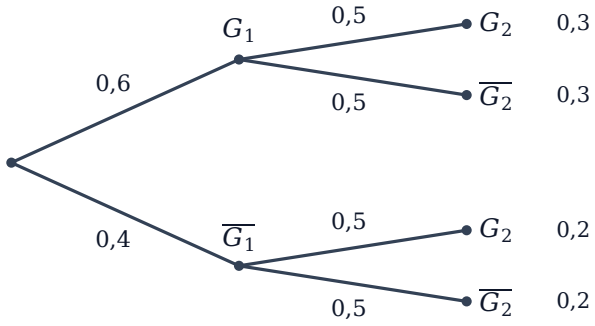
**Piège.** Additionner 0,05 + 0,08 = 0,13 compte deux fois les jours où les deux tombent en panne ($0{,}05 \times 0{,}08 = 0{,}004$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

**Réponse.** $P(\text{arrêt}) = 0{,}126$, soit environ 12,6 % des jours.

## Correction de l’exercice 12 – Pari sur deux matchs

On construit l’arbre des deux matchs ; les résultats étant indépendants, on multiplie le long de chaque chemin.




*$G_i$ : victoire au match $i$*

— **Les deux** : $0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}30$.
— **Exactement un** : $0{,}6 \times 0{,}5 + 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}30 + 0{,}20 = 0{,}50$.
— **Aucun** : $0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}20$.

**Contrôle.** $0{,}30 + 0{,}50 + 0{,}20 = 1$.

**Réponse.** Les deux : 0,30 — exactement un : 0,50 — aucun : 0,20.

## Correction de l’exercice 13 – Dé truqué à détecter

La somme des probabilités des six faces vaut 1 :

$$P(6) = 1 - 5 \times 0{,}15 = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$$

Pour un dé équilibré, $P(6) = \dfrac{1}{6} \approx 0{,}167$. Ici $0{,}25 > 0{,}167$ : le dé **favorise** le 6.

$$\frac{0{,}25}{1/6} = 1{,}5$$

Le 6 sort 1,5 fois plus souvent qu’avec un dé normal, soit 50 % de plus.

**Réponse.** $P(6) = 0{,}25$ : le dé favorise le 6 (50 % de plus que la normale).

## Correction de l’exercice 14 – Le paradoxe des deux enfants

Sans information, les quatre cas (aîné ; cadet) sont équiprobables : *FF*, *FG*, *GF*, *GG*.

**On sait qu’au moins un enfant est une fille** : le cas *GG* est exclu. Il reste trois cas équiprobables, *FF*, *FG*, *GF*.

L’autre enfant est un garçon dans *FG* et *GF* : 2 cas sur 3.

$$\text{probabilité} = \frac{2}{3}$$

Ce n’est donc **pas** une chance sur deux.

**Variante.** Si l’on sait que l’**aînée** est une fille, il reste *FF* et *FG* : la probabilité tombe à $\dfrac{1}{2}$. L’information donnée change le décompte.

**Réponse.** Non : $\dfrac{2}{3}$ (et $\dfrac{1}{2}$ si l’on précise que l’aînée est une fille).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

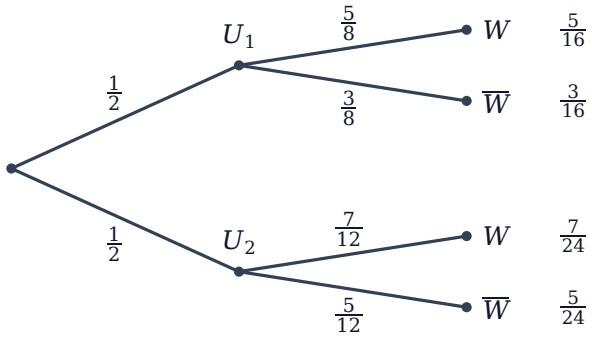
## Correction de l’exercice 15 – Choisir entre deux urnes

**Choix réfléchi.** On compare les proportions de boules gagnantes :

$$\frac{5}{8} = 0{,}625 \qquad \frac{7}{12} \approx 0{,}583$$

On choisit l’urne $U_1$.

**Urne choisie au hasard.** On tire l’urne à pile ou face, puis une boule : on multiplie le long des chemins et on additionne ceux qui mènent à $W$.




*$W$ : boule gagnante*

$$P(W) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{7}{12} = \frac{15}{48} + \frac{14}{48} = \frac{29}{48} \approx 0{,}604$$

Le résultat est entre les deux proportions : choisir l’urne au hasard fait moins bien que choisir $U_1$.

**Réponse.** $U_1$ (0,625 contre ≈ 0,583) ; urne au hasard : $\frac{29}{48} \approx 0{,}604$.

## Correction de l’exercice 16 – Synthèse : une tombola de club

a) $1 + 4 + 20 = 25$ billets gagnants sur 500 :

$$P(\text{lot}) = \frac{25}{500} = 0{,}05$$

b) Les lots valent au total $600 + 4 \times 50 + 20 \times 10 = 1000$ €, répartis sur 500 billets : un billet rapporte en moyenne 2 €. Il coûte 5 € : l’acheteur perd en moyenne 3 **€** par billet.

c) Le club encaisse $500 \times 5 = 2500$ € et distribue 1000 € de lots : 1500 **€** de bénéfice.

d) Avec $n$ billets, on ne gagne rien si les $n$ billets sont perdants. Les billets étant tirés sans remise, cette probabilité vaut

$$\frac{475}{500} \times \frac{474}{499} \times \cdots \quad (n \text{ facteurs})$$

Un calcul à la calculatrice (ou une boucle en Python) donne environ 0,509 pour $n = 13$ et 0,483 pour $n = 14$. Il faut donc 14 **billets** pour que la probabilité de gagner au moins un lot dépasse $\frac{1}{2}$.

**Réponse.** a) 0,05 — b) −3 € par billet — c) 1500 € — d) 14 billets.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).