

Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : jeux, paris et décisions

Probabilités (introduction) — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Gain moyen (espérance) d'un jeu. Si les gains nets $g_1, \dots, g_k$ ont les probabilités $p_1, \dots, p_k$:

$$G = g_1 p_1 + g_2 p_2 + \dots + g_k p_k$$

Signe de G	Interprétation
$G > 0$	jeu favorable au joueur
$G = 0$	jeu équitable
$G < 0$	jeu favorable à l'organisateur

Le **gain net** est ce que l'on reçoit **moins** la mise. Une mise perdue compte $-m$.

Toutes les formules utiles réunies.

$$P(A) = \frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}} \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Le long d'un chemin d'arbre on **multiplie**, entre chemins on **additionne**.

Trois intuitions fausses à démontrer.

- « J'ai eu cinq faces de suite, donc pile est plus probable maintenant » — faux, les lancers sont indépendants.
- « Il y a trois résultats possibles, donc chacun vaut $\frac{1}{3}$ » — faux si les issues ne sont pas équiprobables.
- « Une chance sur n signifie qu'en n essais je gagne » — faux, la probabilité de gagner au moins une fois en n essais vaut $1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$, soit environ 63 % pour n grand.

Méthode de décision. Calculer, puis **comparer**, puis répondre en une phrase de contexte — jamais par un nombre seul.

Correction de l'exercice 1 – Un jeu de dé est-il équitable ?

- **Probabilité de gagner** : $\frac{1}{6}$ ✓
- **Probabilité de perdre** : $\frac{5}{6}$ ✓
- **Gain net en cas de victoire** : $15 - 3 = 12$ € ✓
- **Gain net en cas d'échec** : -3 € ✓
- **Gain moyen** :

$$G = 12 \times \frac{1}{6} + (-3) \times \frac{5}{6} = 2 - 2,5 = -0,5 \text{ €}$$

- **Conclusion** : le jeu **n'est pas équitable**, il est défavorable au joueur ✓
- **Perte moyenne** : 0,50 € par partie ✓

- **En proportion de la mise** : $\frac{0,5}{3} \approx 16,7\%$ ✓
 - **Sur 60 parties** : environ 30 € de perte ✓
 - **Gain qui rendrait le jeu équitable** : il faut g tel que $(g - 3) \times \frac{1}{6} - 3 \times \frac{5}{6} = 0$ ✓
 - **Résolution** : $g - 3 = 15$, donc $g = 18$ € ✓
 - **Vérification** : $15 \times \frac{1}{6} - 3 \times \frac{5}{6} = 2,5 - 2,5 = 0$ ✓
 - **Autre réglage possible** : baisser la mise à 2,50 € ✓
 - **Contrôle** : $12,5 \times \frac{1}{6} - 2,5 \times \frac{5}{6} \approx 2,083 - 2,083 = 0$ ✓
 - **Règle simple** : un jeu à une chance sur 6 est équitable si le gain vaut 6 fois la mise ✓
- Réponse.** Non : le gain moyen vaut $-0,50$ € par partie ; il faudrait recevoir 18 € (ou miser 2,50 €).

Correction de l'exercice 2 - Roue de fête foraine

- **Probabilités** : $\frac{1}{10}$; $\frac{2}{10}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{4}{10}$ ✓
- **Contrôle** : la somme vaut 1 ✓
- **Gains nets** : $20 - 4 = 16$; $5 - 4 = 1$; $1 - 4 = -3$; $0 - 4 = -4$ € ✓
- **Gain moyen** :

$$G = 16 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{2}{10} + (-3) \times \frac{3}{10} + (-4) \times \frac{4}{10}$$
- **Détail** : $1,6 + 0,2 - 0,9 - 1,6 = -0,7$ € ✓
- **Conclusion** : le forain gagne en moyenne 0,70 € par partie ✓
- **Contrôle par une autre méthode** : gain brut moyen

$$= \frac{20 + 2 \times 5 + 3 \times 1}{10} = \frac{33}{10} = 3,30 \text{ €} \quad \checkmark$$
- **Puis** : $3,30 - 4 = -0,70$ € ✓
- **Cohérence** : les deux méthodes concordent ✓
- **Sur 500 parties** : le forain encaisse environ 350 € ✓
- **Probabilité de gagner de l'argent** : il faut 20 € ou 5 €, soit $\frac{3}{10} = 0,3$ ✓
- **Probabilité de perdre de l'argent** : $\frac{7}{10} = 0,7$ ✓
- **Prix rendant le jeu équitable** : 3,30 € ✓
- **Marge du forain en pourcentage** : $\frac{0,7}{4} = 17,5\%$ ✓
- **Ordre de grandeur** : c'est une marge typique de fête foraine, très supérieure à celle d'un casino (de l'ordre de 2 à 5 %) ✓

Réponse. $G = -0,70$ € : le joueur perd en moyenne 0,70 € par partie (jeu équitable à 3,30 €).

Correction de l'exercice 3 - Deux stratégies au jeu du dé

- **Stratégie A** : $P(A) = \frac{1}{6} \approx 0,1667$ ✓
- **Stratégie B** : on passe par le contraire, « aucun 6 » ✓
- **Probabilité d'aucun 6** : $\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36} \approx 0,6944$ ✓
- **Donc** :

$$P(B) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} \approx 0,3056$$

- **Comparaison** : $0,3056 > 0,1667$, donc B est bien meilleure ✓
- **Rapport** : $\frac{11/36}{1/6} = \frac{11}{6} \approx 1,83$ ✓
- **Réponse à la question** : B n'est **pas** deux fois meilleure, mais 1,83 fois ✓
- **Erreur intuitive** : croire que $P(B) = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ ✓
- **Origine de l'erreur** : on compterait deux fois le cas « deux 6 » ✓
- **Correction par la formule de la réunion** : $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$ ✓
- **Contrôle** : $\frac{6+6-1}{36} = \frac{11}{36}$ ✓
- **Avec trois lancers** : $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1 - \frac{125}{216} \approx 0,4213$ ✓
- **Avec six lancers** : $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 1 - 0,3349 = 0,6651$ ✓
- **Leçon essentielle** : six lancers ne garantissent **pas** un 6 — il reste une chance sur trois de n'en voir aucun ✓
- **Nombre de lancers pour dépasser 90 %** : 13 lancers, car $\left(\frac{5}{6}\right)^{13} \approx 0,0935$ ✓

Réponse. $P(A) = \frac{1}{6}$ et $P(B) = \frac{11}{36}$: B est 1,83 fois meilleure, pas deux fois.

Correction de l'exercice 4 - Le joueur qui croit à la compensation

- **Affirmation du joueur** : fausse ✓
- **Raison** : la pièce n'a pas de mémoire, chaque lancer est **indépendant** des précédents ✓
- **Probabilité de pile au sixième lancer** : $\frac{1}{2}$, quelle que soit l'histoire ✓
- **Six faces de suite** :

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} \approx 0,0156$$

- **Cinq faces de suite** : $\frac{1}{32} \approx 0,0313$ ✓
- **Distinction essentielle** : la probabilité d'une **série de six faces annoncée d'avance** vaut $\frac{1}{64}$ ✓
- **Mais** : la probabilité d'une sixième face **sachant** que cinq sont déjà tombées vaut $\frac{1}{2}$ ✓
- **Contrôle de cohérence** : $\frac{1}{32} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{64}$ ✓
- **Nom de l'erreur** : le « sophisme du joueur » ✓
- **Séquence FFFFFP** : elle vaut aussi $\frac{1}{64}$ ✓
- **Conclusion frappante** : FFFFFF et FFFFFP sont **exactement** aussi probables ✓
- **Ce qui est rare** : obtenir six lancers **du même côté**, soit $\frac{2}{64} = \frac{1}{32}$ ✓
- **Ce qui est fréquent** : obtenir trois piles et trois faces, soit $\frac{20}{64} = 0,3125$ ✓
- **Contrôle** : les 64 issues se répartissent en 1 ; 6 ; 15 ; 20 ; 15 ; 6 ; 1 selon le nombre de piles ✓
- **Contrôle de la somme** : $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64$ ✓

Réponse. L'affirmation est fausse (lancers indépendants) : pile reste à $\frac{1}{2}$, et six faces de

suite valent $\frac{1}{64}$.

Correction de l'exercice 5 - Contrôle antidopage

- **Notations** : P pour positif, H pour haltérophile ✓
- **Probabilité d'être positif** : $\frac{12}{200} = 0,06$ ✓
- **Probabilité d'être haltérophile** : $\frac{40}{200} = 0,20$ ✓
- **Les deux** : $\frac{9}{200} = 0,045$ ✓
- **Réunion** :

$$P(P \cup H) = 0,06 + 0,20 - 0,045 = 0,215$$
- **Ni l'un ni l'autre** : $1 - 0,215 = 0,785$ ✓
- **Effectif correspondant** : 157 sportifs ✓
- **Contrôle** : $200 - (3 + 31 + 9) = 157$ ✓
- **Détail du tableau** : positifs non haltérophiles 3 ; haltérophiles négatifs 31 ; positifs haltérophiles 9 ; les autres 157 ✓
- **Contrôle** : $3 + 31 + 9 + 157 = 200$ ✓
- **Taux de positifs chez les haltérophiles** : $\frac{9}{40} = 22,5\%$ ✓
- **Taux de positifs chez les autres** : $\frac{3}{160} = 1,875\%$ ✓
- **Rapport** : $\frac{22,5}{1,875} = 12$ ✓
- **Commentaire** : le taux de positivité est douze fois plus élevé en haltérophilie ✓
- **Prudence nécessaire** : 40 haltérophiles forment un petit échantillon, et les contrôles n'étaient peut-être pas répartis au hasard ✓
- **Conclusion mesurée** : l'écart est net mais ne prouve pas à lui seul un dopage plus répandu dans la discipline ✓

Réponse. $P(P) = 0,06$, $P(H) = 0,20$, $P(P \cap H) = 0,045$, $P(P \cup H) = 0,215$; taux de positifs 12 fois plus élevé en haltérophilie.

Correction de l'exercice 6 - Trois portes

- **Un seul coffre choisi** : $P = \frac{1}{3} \approx 0,333$ ✓
- **Deux coffres ouverts** : on gagne sauf si le prix est dans le troisième ✓
- **Probabilité de perdre** : $\frac{1}{3}$ ✓
- **Probabilité de gagner** :

$$P = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \approx 0,667$$
- **Vérification par dénombrement** : 2 des 3 coffres sont ouverts, chacun ayant $\frac{1}{3}$ de contenir le prix ✓
- **Contrôle** : $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ ✓
- **Rapport** : la probabilité **double** ✓
- **Avec n coffres et 1 ouvert** : $\frac{1}{n}$ ✓
- **Avec n coffres et k ouverts** : $\frac{k}{n}$ ✓

- **Contrôle avec $n = 3$ et $k = 2$:** $\frac{2}{3}$ ✓
 - **Contrôle du cas limite :** $k = n$ donne 1, on gagne à coup sûr ✓
 - **Sur 10 coffres :** ouvrir 2 coffres donne $\frac{2}{10} = 0,2$ ✓
 - **Nombre de coffres à ouvrir pour atteindre 50 % sur 10 coffres :** 5 ✓
 - **Piège de raisonnement :** croire qu'ouvrir deux coffres sur trois « laisse une chance sur deux » ✓
 - **Correction du piège :** ce n'est pas le nombre de coffres restants qui compte, mais la proportion de coffres **ouverts** ✓
- Réponse.** $\frac{1}{3}$ avec un coffre, $\frac{2}{3}$ avec deux : la probabilité double.

Correction de l'exercice 7 - Assurance et sinistres

- **Coût moyen par client :**

$$0,04 \times 2500 = 100 \text{ €}$$
 - **Recette :** 150 € par client ✓
 - **Bénéfice moyen :**

$$150 - 100 = 50 \text{ €}$$
 - **Marge :** $\frac{50}{150} \approx 33,3\%$ ✓
 - **Prime d'équilibre :** 100 €, qui couvre exactement le coût moyen ✓
 - **Contrôle :** $0,04 \times 2500 = 100$ ✓
 - **Sur 10 000 clients :** recettes $10\,000 \times 150 = 1\,500\,000 \text{ €}$ ✓
 - **Nombre de sinistres attendu :** $0,04 \times 10\,000 = 400$ ✓
 - **Coût des sinistres :** $400 \times 2500 = 1\,000\,000 \text{ €}$ ✓
 - **Bénéfice total :** $1\,500\,000 - 1\,000\,000 = 500\,000 \text{ €}$ ✓
 - **Contrôle :** $10\,000 \times 50 = 500\,000 \text{ €}$ ✓
 - **Point de bascule :** l'assureur perd de l'argent si le taux de sinistres dépasse $\frac{150}{2500} = 6\%$ ✓
 - **Marge de sécurité :** de 4 % à 6 %, soit un demi-point de hausse relative de 50 % ✓
 - **Rôle du nombre de clients :** plus ils sont nombreux, plus le taux réel se rapproche de 4 % — c'est tout le principe de la mutualisation ✓
- Réponse.** Bénéfice moyen 50 € par client ; la prime d'équilibre est de 100 €, et l'assureur perd au-delà de 6 % de sinistres.

Correction de l'exercice 8 - Deux dés contre un dé

- **Jeu A :** les résultats 5 et 6 ✓
- **Probabilité :** $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0,3333$ ✓
- **Jeu B :** sommes 10, 11 ou 12 ✓
- **Comptage :** $3 + 2 + 1 = 6$ issues sur 36 ✓
- **Probabilité :**

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0,1667$$
- **Comparaison :** $\frac{1}{3} > \frac{1}{6}$ ✓
- **Conclusion :** le jeu A est **deux fois** plus favorable ✓

- **Rapport exact** : $\frac{1/3}{1/6} = 2$ ✓
- **Piège d'intuition** : deux dés « donnent plus de chances », alors que le seuil demandé est bien plus exigeant ✓
- **Seuil équivalent avec deux dés** : il faudrait $P = \frac{1}{3}$, soit 12 issues ✓
- **Recherche du seuil** : les sommes ≥ 9 donnent $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ issues ✓
- **Les sommes ≥ 8** : $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ issues ✓
- **Conclusion** : aucun seuil entier ne donne exactement $\frac{1}{3}$, mais « au moins 9 » ($\frac{10}{36} \approx 0,278$) en est le plus proche par le bas ✓
- **Contrôle** : $\frac{15}{36} \approx 0,417$ pour « au moins 8 » ✓
- **Réponse finale** : choisir A ✓

Réponse. $P(A) = \frac{1}{3}$ contre $P(B) = \frac{1}{6}$: le jeu A, deux fois plus favorable.

Correction de l'exercice 9 - Tirage au sort d'un binôme

- **Nombre de binômes** : $\frac{6 \times 5}{2} = 15$ ✓
- **Binôme Léa-Tom** : un seul des 15 ✓
- **Probabilité** :

$$P = \frac{1}{15} \approx 0,0667$$

- **Binômes contenant Léa** : elle peut être associée à l'un des 5 autres ✓
- **Probabilité** :

$$P = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \approx 0,333$$

- **Contrôle intuitif** : 2 élèves sont tirés sur 6, donc chaque élève a $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ de chances ✓
- **Binômes sans Léa ni Tom** : $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ ✓
- **Probabilité** : $\frac{6}{15} = 0,4$ ✓
- **Exactement un des deux** : $15 - 1 - 6 = 8$ binômes ✓
- **Probabilité** : $\frac{8}{15} \approx 0,533$ ✓
- **Contrôle de la partition** : $1 + 8 + 6 = 15$ ✓
- **Contrôle par la formule** : $P(\text{Léa} \cup \text{Tom}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{15} = \frac{5+5-1}{15} = \frac{9}{15} = 0,6$ ✓
- **Contrôle croisé** : $\frac{1}{15} + \frac{8}{15} = \frac{9}{15}$ ✓
- **Avec 10 élèves** : la probabilité d'être ensemble tomberait à $\frac{1}{45} \approx 0,022$ ✓
- **Règle** : cette probabilité vaut $\frac{2}{n(n-1)}$ et décroît très vite avec la taille du groupe ✓

Réponse. $P(\text{Léa et Tom}) = \frac{1}{15}$ et $P(\text{Léa dans le binôme}) = \frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 10 - Quiz à choix multiples

- **Probabilité d'une bonne réponse** : $\frac{1}{3}$ ✓
- **Probabilité d'une mauvaise** : $\frac{2}{3}$ ✓

— **Tout bon :**

$$P = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} \approx 0,0123$$

— **Tout faux :**

$$P = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} \approx 0,1975$$

— **Au moins une bonne :** $1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81} \approx 0,8025$ ✓

— **Contrôle :** $81 - 16 = 65$ ✓

— **Nombre total de feuilles de réponses possibles :** $3^4 = 81$ ✓

— **Cohérence :** les 81 feuilles sont équiprobables, d'où les fractions de dénominateur 81 ✓

— **Exactement une bonne :** 4 positions possibles pour la bonne, et $2^3 = 8$ façons de se tromper aux trois autres ✓

— **Comptage :** $4 \times 8 = 32$ feuilles, soit $\frac{32}{81} \approx 0,395$ ✓

— **Exactement deux bonnes :** 6 paires de positions et $2^2 = 4$ erreurs possibles, soit 24 feuilles ✓

— **Exactement trois bonnes :** $4 \times 2 = 8$ feuilles ✓

— **Contrôle de la partition :** $16 + 32 + 24 + 8 + 1 = 81$ ✓

— **Nombre moyen de bonnes réponses :** $4 \times \frac{1}{3} \approx 1,33$ ✓

— **Conclusion pour la notation :** répondre au hasard rapporte en moyenne le tiers des points, d'où l'usage de **points négatifs** dans certains concours ✓

Réponse. Tout bon : $\frac{1}{81}$ · tout faux : $\frac{16}{81}$ · au moins une bonne : $\frac{65}{81} \approx 0,803$.

Correction de l'exercice 11 - Deux machines en série

— **Stratégie :** passer par le contraire, « aucune panne » ✓

— **Première machine en marche :** $1 - 0,05 = 0,95$ ✓

— **Seconde machine en marche :** $1 - 0,08 = 0,92$ ✓

— **Les deux en marche :** $0,95 \times 0,92 = 0,874$ ✓

— **Probabilité d'arrêt :**

$$P = 1 - 0,874 = 0,126$$

— **Lecture :** la chaîne s'arrête environ 12,6 % des jours ✓

— **Erreur à éviter :** additionner $0,05 + 0,08 = 0,13$ ✓

— **Écart avec la bonne valeur :** 0,13 contre 0,126, l'écart vaut la probabilité de **double** panne ✓

— **Double panne :** $0,05 \times 0,08 = 0,004$ ✓

— **Contrôle :** $0,13 - 0,004 = 0,126$ ✓

— **Sur 250 jours ouvrés :** environ 31,5 jours d'arrêt ✓

— **Exactement une panne :** $0,126 - 0,004 = 0,122$ ✓

— **Avec une troisième machine à 0,03 :** $P(\text{marche}) = 0,874 \times 0,97 = 0,84778$ ✓

— **Nouvelle probabilité d'arrêt :** $\approx 0,152$ ✓

— **Leçon industrielle :** chaque machine ajoutée **en série** dégrade la fiabilité globale ✓

— **Ordre de grandeur :** avec 10 machines à 0,05, la chaîne s'arrêterait $1 - 0,95^{10} \approx 40$ % des jours ✓

Réponse. $P(\text{arrêt}) = 1 - 0,95 \times 0,92 = 0,126$, soit environ 12,6 % des jours.

Correction de l'exercice 12 - Pari sur deux matches

- **Les deux** : $0,6 \times 0,5 = 0,30$ ✓
- **Aucun** : $0,4 \times 0,5 = 0,20$ ✓
- **Premier seulement** : $0,6 \times 0,5 = 0,30$ ✓
- **Second seulement** : $0,4 \times 0,5 = 0,20$ ✓
- **Exactement un** :

$$0,30 + 0,20 = 0,50$$
- **Contrôle de l'arbre** : $0,30 + 0,30 + 0,20 + 0,20 = 1$ ✓
- **Au moins un** : $1 - 0,20 = 0,80$ ✓
- **Contrôle** : $0,30 + 0,50 = 0,80$ ✓
- **Nombre moyen de victoires** : $0 \times 0,2 + 1 \times 0,5 + 2 \times 0,3 = 1,1$ ✓
- **Contrôle intuitif** : $0,6 + 0,5 = 1,1$ ✓
- **Cote équitable pour « les deux »** : $\frac{1}{0,3} \approx 3,33$ ✓
- **Gain d'un pari de 10 € à cette cote** : 33,30 €, soit un gain net de 23,30 € ✓
- **Contrôle du caractère équitable** : $23,3 \times 0,3 - 10 \times 0,7 = 6,99 - 7 \approx 0$ ✓
- **Cote réelle d'un bookmaker** : environ 3, ce qui lui laisse une marge ✓
- **Gain moyen du parieur à la cote 3** : $20 \times 0,3 - 10 \times 0,7 = 6 - 7 = -1$ € ✓
- **Marge du bookmaker** : 10 % de la mise ✓

Réponse. Les deux : 0,30 · exactement un : 0,50 · aucun : 0,20.

Correction de l'exercice 13 - Dé truqué à détecter

- **Somme des cinq premières faces** : $5 \times 0,15 = 0,75$ ✓
- **Probabilité du 6** :

$$P(6) = 1 - 0,75 = 0,25$$
- **Comparaison à un dé équilibré** : $\frac{1}{6} \approx 0,1667$ ✓
- **Conclusion** : le dé favorise le 6 ✓
- **Écart absolu** : $0,25 - 0,1667 \approx 0,0833$ ✓
- **Écart relatif** : $\frac{0,0833}{0,1667} = 50\%$ ✓
- **Lecture** : le 6 sort une fois et demie plus souvent que la normale ✓
- **Contrôle de la loi** : $5 \times 0,15 + 0,25 = 1$ ✓
- **Résultat pair** : $0,15 + 0,15 + 0,25 = 0,55$ ✓
- **Comparaison** : 0,55 contre 0,5 pour un dé équilibré ✓
- **Résultat au moins égal à 5** : $0,15 + 0,25 = 0,40$ ✓
- **Contre un dé équilibré** : $\frac{1}{3} \approx 0,333$ ✓
- **Valeur moyenne du dé truqué** :

$$0,15(1 + 2 + 3 + 4 + 5) + 6 \times 0,25 = 2,25 + 1,5 = 3,75$$
 ✓
- **Valeur moyenne d'un dé équilibré** : 3,5 ✓
- **Détection pratique** : sur 600 lancers, on attendrait 100 six avec un dé honnête et 150 avec celui-ci — un écart largement visible ✓

Réponse. $P(6) = 0,25$: le dé favorise le 6 (50 % de plus que la normale).

Correction de l'exercice 14 - Le paradoxe des deux enfants

- **Univers initial** : FF, FG, GF, GG , chacun de probabilité $\frac{1}{4}$ ✓
- **Information donnée** : « au moins une fille », ce qui élimine GG ✓
- **Cas restants** : FF, FG, GF , soit 3 cas ✓
- **Cas où l'autre enfant est un garçon** : FG et GF , soit 2 cas ✓
- **Probabilité** :

$$P = \frac{2}{3} \approx 0,667$$

- **Réponse** : ce n'est **pas** une chance sur deux, mais deux sur trois ✓
- **Cas où les deux sont des filles** : $\frac{1}{3}$ ✓
- **Contrôle** : $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ ✓
- **Origine de l'intuition fausse** : on croit que « l'autre » enfant est un enfant bien identifié ✓
- **Correction** : l'information porte sur le **couple** d'enfants, pas sur un enfant désigné ✓
- **Variante instructive** : si l'on apprenait que l'**aîné** est une fille, les cas seraient FF et FG ✓
- **Probabilité dans cette variante** : $\frac{1}{2}$ ✓
- **Comparaison** : $\frac{2}{3}$ contre $\frac{1}{2}$ selon la formulation ✓
- **Leçon fondamentale** : en probabilités, la **façon d'obtenir l'information** change le résultat ✓
- **Contrôle avec trois enfants** : sachant qu'au moins un est une fille, il reste 7 cas sur 8, dont 1 seul « toutes filles », soit $\frac{1}{7}$ ✓

Réponse. Non : il y a $\frac{2}{3}$ de chances que l'autre soit un garçon (et $\frac{1}{2}$ seulement si l'on précise que l'aînée est une fille).

Correction de l'exercice 15 - Choisir entre deux urnes

- **Urne U_1** : $P = \frac{5}{8} = 0,625$ ✓
- **Urne U_2** : $P = \frac{7}{12} \approx 0,5833$ ✓
- **Comparaison** : $0,625 > 0,5833$ ✓
- **Mise au même dénominateur** : $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$ et $\frac{7}{12} = \frac{14}{24}$ ✓
- **Conclusion** : choisir U_1 ✓
- **Écart** : $\frac{1}{24} \approx 0,0417$ ✓
- **Si l'urne est tirée au hasard** : chaque urne a $\frac{1}{2}$ de chances ✓
- **Probabilité globale** :

$$P = \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{7}{12} = \frac{15}{48} + \frac{14}{48} = \frac{29}{48} \approx 0,6042$$

- **Contrôle d'encadrement** : $0,5833 < 0,6042 < 0,625$ ✓
- **Cohérence** : la moyenne des deux probabilités, les urnes étant équiprobables ✓
- **Piège classique** : réunir les deux urnes et calculer $\frac{12}{20} = 0,6$ ✓

- **Pourquoi c'est faux** : cela reviendrait à tirer une boule parmi les 20, ce qui donne plus de poids à l'urne la plus grosse ✓
 - **Écart entre les deux modèles** : 0,6042 contre 0,6 ✓
 - **Interprétation** : tirer l'urne au hasard revient à pondérer **également** les deux urnes, malgré leurs tailles différentes ✓
 - **Perte de choisir au hasard plutôt que U_1** : $0,625 - 0,6042 \approx 0,021$, soit 2 points ✓
- Réponse.** U_1 ($\frac{5}{8} = 0,625$ contre $\frac{7}{12} \approx 0,583$) ; en tirant l'urne au hasard, $\frac{29}{48} \approx 0,604$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : une tombola de club

a) **Nombre de lots** : $1 + 4 + 20 = 25$ ✓

— **Probabilité de gagner** :

$$P = \frac{25}{500} = \frac{1}{20} = 0,05$$

— **Probabilité de ne rien gagner** : 0,95 ✓

b) **Gains nets** : vélo $600 - 5 = 595$ € ; bon $50 - 5 = 45$ € ; place $10 - 5 = 5$ € ; rien -5 € ✓

— **Probabilités** : $\frac{1}{500}$; $\frac{4}{500}$; $\frac{20}{500}$; $\frac{475}{500}$ ✓

— **Contrôle** : $1 + 4 + 20 + 475 = 500$ ✓

— **Gain moyen** :

$$G = \frac{595 \times 1 + 45 \times 4 + 5 \times 20 + (-5) \times 475}{500}$$

— **Détail du numérateur** : $595 + 180 + 100 - 2375 = -1500$ ✓

— **Résultat** :

$$G = \frac{-1500}{500} = -3 \text{ €}$$

— **Lecture** : chaque acheteur perd en moyenne 3 € ✓

— **Contrôle par une autre méthode** : valeur totale des lots $600 + 200 + 200 = 1000$ €, soit $\frac{1000}{500} = 2$ € de gain brut moyen ✓

— **Puis** : $2 - 5 = -3$ € ✓

— **Cohérence** : les deux méthodes concordent ✓

c) **Recette** : $500 \times 5 = 2500$ € ✓

— **Valeur des lots** : 1000 € ✓

— **Bénéfice** :

$$2500 - 1000 = 1500 \text{ €}$$

— **Contrôle** : $500 \times 3 = 1500$ €, soit l'opposé du gain moyen multiplié par le nombre de billets ✓

— **Taux de redistribution** : $\frac{1000}{2500} = 40\%$ ✓

— **Comparaison** : une loterie nationale redistribue de l'ordre de 60 à 70 % ✓

d) **Recherche du nombre de billets** ✓

— **Avec n billets, probabilité de ne rien gagner** : il faut que les n billets soient parmi les 475 perdants ✓

— **Approximation utile** : $P(\text{rien}) \approx 0,95^n$ ✓

— **Condition** : $0,95^n < 0,5$ ✓

— **Essai avec $n = 13$** : $0,95^{13} \approx 0,5133$ ✓

- **Essai avec $n = 14$** : $0,95^{14} \approx 0,4877$ ✓
- **Conclusion** : il faut acheter 14 billets ✓
- **Probabilité de gagner alors** : $\approx 0,512$ ✓
- **Coût** : $14 \times 5 = 70$ € ✓
- **Perte moyenne correspondante** : $14 \times 3 = 42$ € ✓
- **Conclusion honnête** : dépenser 70 € pour une chance sur deux de gagner un lot dont la valeur moyenne est de $\frac{1000}{25} = 40$ € reste une mauvaise affaire ✓
- **Nuance** : une tombola de club n'est pas un placement, c'est un **don** — le bénéfice de 1500 € finance l'association ✓

Réponse. a) 0,05 · b) -3 € · c) 1500 € de bénéfice · d) 14 billets.