

Plaquette 1 - Indicateurs de position et de dispersion

Statistiques descriptives — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules et méthodes pour les statistiques.

- Moyenne d'une série de N valeurs : $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$.
- Moyenne avec un tableau d'effectifs n_i : $\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_px_p}{N}$ avec $N = n_1 + \dots + n_p$.
- Pour une série en classes, on remplace chaque classe par son **centre**.
- **Médiane** : on range les valeurs par ordre croissant. Si N est impair, c'est la valeur de rang $\frac{N+1}{2}$; si N est pair, c'est la demi-somme des valeurs de rangs $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2} + 1$.
- **Quartiles** : Q_1 est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25 % des données lui sont inférieures ou égales ; Q_3 correspond à 75 %. En pratique : rang $\frac{N}{4}$ (arrondi au rang supérieur s'il n'est pas entier) pour Q_1 , rang $\frac{3N}{4}$ pour Q_3 .
- Dispersion : **étendue** = max – min, **écart interquartile** = $Q_3 - Q_1$.
- Fréquence d'une valeur : $f_i = \frac{n_i}{N}$, souvent exprimée en pourcentage.

Correction de l'exercice 1 - Moyenne et étendue d'une série brute

Formule du cours : $\bar{x} = \frac{\text{somme des valeurs}}{\text{nombre de valeurs}}$.

- Somme : $12 + 15 + 9 + 18 + 11 = 65$.
- Moyenne : $\bar{x} = \frac{65}{5} = 13$ °C.
- Étendue : max – min = $18 - 9 = 9$ °C.
- Interprétation : les températures se répartissent autour de 13 °C, sur une plage de 9 °C.

Réponse. $\bar{x} = 13$ °C et étendue = 9 °C.

Correction de l'exercice 2 - Moyenne pondérée par des coefficients

Une moyenne pondérée est une moyenne où chaque valeur compte autant de fois que son coefficient :

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3}{n_1 + n_2 + n_3}$$

- Numérateur : $1 \times 8 + 2 \times 12 + 3 \times 15 = 8 + 24 + 45 = 77$.
- Dénominateur : $1 + 2 + 3 = 6$.
- Donc $\bar{x} = \frac{77}{6} \approx 12,83$.
- Remarque : la moyenne simple des trois notes vaudrait $\frac{35}{3} \approx 11,67$; les coefficients tirent la moyenne vers la meilleure note.

Réponse. $\bar{x} = \frac{77}{6} \approx 12,83$.

Correction de l'exercice 3 - Médiane d'une série de taille impaire

- Ici $N = 7$, nombre impair : la médiane est la valeur de rang $\frac{N+1}{2} = 4$.
- La 4^e valeur est 12 : la médiane vaut 12 minutes.
- Interprétation : au moins la moitié des durées sont inférieures ou égales à 12 minutes, et au moins la moitié y sont supérieures ou égales.
- Remarque : la moyenne vaut $\frac{82}{7} \approx 11,71$, très proche de la médiane ; la série est assez régulière.

Réponse. Médiane = 12 minutes.

Correction de l'exercice 4 - Médiane d'une série de taille paire

- Ici $N = 8$, nombre pair : la médiane est la demi-somme des valeurs de rangs $\frac{N}{2} = 4$ et $\frac{N}{2} + 1 = 5$.
- La 4^e valeur est 10, la 5^e est 11.

$$Me = \frac{10 + 11}{2} = 10,5$$

- La médiane n'est pas forcément une valeur de la série : ici 10,5 n'y figure pas.

Réponse. Me = 10,5.

Correction de l'exercice 5 - Quartiles et écart interquartile

$N = 12$.

- Médiane : N est pair, on prend la demi-somme des rangs 6 et 7, soit $\frac{9+11}{2} = 10$.
- Q_1 : rang $\frac{N}{4} = \frac{12}{4} = 3$ (entier), donc Q_1 est la 3^e valeur : $Q_1 = 5$.
- Q_3 : rang $\frac{3N}{4} = \frac{36}{4} = 9$, donc Q_3 est la 9^e valeur : $Q_3 = 14$.
- Écart interquartile : $Q_3 - Q_1 = 14 - 5 = 9$.
- Interprétation : la moitié « centrale » des notes est comprise entre 5 et 14, soit une plage de 9 points ; l'étendue, elle, vaut $21 - 2 = 19$.

Réponse. Me = 10 ; $Q_1 = 5$; $Q_3 = 14$; $Q_3 - Q_1 = 9$.

Correction de l'exercice 6 - Série donnée par un tableau d'effectifs

Formule du cours : $\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{N}$.

- Numérateur : $0 \times 5 + 1 \times 8 + 2 \times 12 + 3 \times 3 + 4 \times 2 = 0 + 8 + 24 + 9 + 8 = 49$.
- Effectif total : $5 + 8 + 12 + 3 + 2 = 30$ (cohérent avec l'énoncé).
- Moyenne : $\bar{x} = \frac{49}{30} \approx 1,63$ frère ou sœur.
- Médiane : $N = 30$ est pair, il faut les valeurs de rangs 15 et 16. On calcule les effectifs cumulés croissants : 5 ; 13 ; 25 ; 28 ; 30.
- Les rangs 14 à 25 correspondent à la valeur 2 : les 15^e et 16^e élèves ont donc 2 frères et sœurs, et Me = 2.

Réponse. $\bar{x} \approx 1,63$ et Me = 2.

Correction de l'exercice 7 - Série regroupée en classes

Méthode du cours : dans une série en classes, on ne connaît pas les valeurs exactes ; on remplace chaque classe par son **centre**.

- Centres : 5 ; 15 ; 25 ; 35.
- Somme pondérée : $4 \times 5 + 11 \times 15 + 8 \times 25 + 2 \times 35 = 20 + 165 + 200 + 70 = 455$.
- Effectif total : $4 + 11 + 8 + 2 = 25$.

$$\bar{x} \approx \frac{455}{25} = 18,2 \text{ minutes}$$

- C'est une **valeur approchée** : la vraie moyenne dépend de la répartition à l'intérieur de chaque classe.

Réponse. $\bar{x} \approx 18,2$ minutes.

Correction de l'exercice 8 - Fréquences et effectifs cumulés

Formule du cours : $f_i = \frac{n_i}{N}$, que l'on convertit en pourcentage en multipliant par 100.

- $[0 ; 10[: \frac{4}{25} = 0,16$, soit 16 %.
- $[10 ; 20[: \frac{11}{25} = 0,44$, soit 44 %.
- $[20 ; 30[: \frac{8}{25} = 0,32$, soit 32 %.
- $[30 ; 40[: \frac{2}{25} = 0,08$, soit 8 %.
- Contrôle : $16 + 44 + 32 + 8 = 100$ %.
- « Moins de 20 minutes » regroupe les deux premières classes : $16 + 44 = 60$ % des salariés.

Réponse. 16 % ; 44 % ; 32 % ; 8 % · et 60 % des salariés sous les 20 minutes.

Correction de l'exercice 9 - Lire un résumé en cinq nombres

- a) $Q_3 - Q_1 = 15 - 8 = 7$ points : la moitié centrale des notes tient dans 7 points.
- b) $Q_1 = 8$ signifie qu'au moins 25 % des élèves ont une note inférieure ou égale à 8 ; donc **environ** 75 % des élèves ont au moins 8.
- c) Non. $Q_3 = 15$ indique qu'environ 75 % des élèves ont au plus 15 : seuls environ 25 % dépassent 15. C'est la médiane, 11, qui partage la classe en deux moitiés.

Réponse. a) 7 · b) environ 75 % · c) non, environ 25 % seulement.

Correction de l'exercice 10 - Comparer deux séries

- Atelier A : somme = $98 + 99 + 100 + 101 + 102 = 500$, donc $\overline{x_A} = \frac{500}{5} = 100$ g.
Étendue : $102 - 98 = 4$ g.
- Atelier B : somme = $90 + 95 + 100 + 105 + 110 = 500$, donc $\overline{x_B} = 100$ g. Étendue : $110 - 90 = 20$ g.
- Les deux moyennes sont **identiques** : un indicateur de position ne suffit donc pas à comparer les ateliers.
- L'étendue de A est cinq fois plus petite : l'atelier A est bien plus **régulier**. C'est exactement le rôle des indicateurs de dispersion.

Réponse. Même moyenne 100 g ; étendues 4 g (A) et 20 g (B) : l'atelier A est plus régulier.

Correction de l'exercice 11 - Effet d'une valeur ajoutée

a) On revient à la définition : la somme des 9 valeurs vaut $9 \times 12 = 108$.

— Nouvelle somme : $108 + 42 = 150$ pour 10 valeurs.

$$\bar{x} = \frac{150}{10} = 15$$

— La moyenne passe de 12 à 15 : une seule valeur extrême la déplace de 3 unités.

b) La médiane, elle, ne dépend que du **rang** central. En ajoutant une valeur au-dessus de toutes les autres, la médiane devient la demi-somme des 5^e et 6^e valeurs de la nouvelle série : elle bouge très peu.

— Conclusion : la médiane est **robuste** aux valeurs extrêmes, la moyenne ne l'est pas.
C'est pourquoi on publie souvent le salaire médian plutôt que le salaire moyen.

Réponse. a) $\bar{x} = 15$ · b) non : la médiane est peu sensible aux valeurs extrêmes.