Plaquette 1 – Indicateurs de position et de dispersion

Statistiques descriptives — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules et méthodes pour les statistiques.

— Moyenne d'une série de N valeurs : $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N}$.

— Moyenne avec un tableau d'effectifs n_i, où $N = n_1 + \cdots + n_p$:

$$\overline{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_p x_p}{N}$$

— Pour une série en classes, on remplace chaque classe par son **centre**.

— **Médiane** : on range les valeurs par ordre croissant. Si N est impair, c'est la valeur de rang $\dfrac{N+1}{2}$; si N est pair, c'est la demi-somme des valeurs de rangs $\dfrac{N}{2}$ et $\dfrac{N}{2}+1$.

— **Quartiles** : Q_1 est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25 % des données lui sont inférieures ou égales ; Q_3 correspond à 75 %. En pratique : rang $\dfrac{N}{4}$ (arrondi au rang supérieur s'il n'est pas entier) pour Q_1, rang $\dfrac{3N}{4}$ pour Q_3.

— Dispersion : **étendue** $= \max - \min$, **écart interquartile** $= Q_3 - Q_1$.

— Fréquence d'une valeur : $f_i = \dfrac{n_i}{N}$, souvent exprimée en pourcentage.

— **Écart-type** : racine carrée de la moyenne des carrés des écarts à la moyenne,

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_N - \overline{x})^2}{N}}$$

Correction de l'exercice 1 – Moyenne et étendue d'une série brute

Formule du cours : $\overline{x} = \dfrac{\text{somme des valeurs}}{\text{nombre de valeurs}}$.

— Somme : $12 + 15 + 9 + 18 + 11 = 65$.

— Moyenne : $\overline{x} = \dfrac{65}{5} = 13$ °C.

— Étendue : $\max - \min = 18 - 9 = 9$ °C.

— Interprétation : les températures se répartissent autour de 13 °C, sur une plage de 9 °C.

Réponse. $\overline{x} = 13$ °C et étendue $= 9$ °C.

Correction de l'exercice 2 – Moyenne pondérée par des coefficients

Une moyenne pondérée est une moyenne où chaque valeur compte autant de fois que son coefficient :

$$\overline{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3}{n_1 + n_2 + n_3}$$

— Numérateur : $1 \times 8 + 2 \times 12 + 3 \times 15 = 8 + 24 + 45 = 77$.

— Dénominateur : $1 + 2 + 3 = 6$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Donc $\overline{x} = \dfrac{77}{6} \approx 12{,}83$.

— Remarque : la moyenne simple des trois notes vaudrait $\dfrac{35}{3} \approx 11{,}67$; les coefficients tirent la moyenne vers la meilleure note.

Réponse. $\overline{x} = \dfrac{77}{6} \approx 12{,}83$.

Correction de l'exercice 3 – Médiane d'une série de taille impaire

— Ici $N = 7$, nombre impair : la médiane est la valeur de rang $\dfrac{N+1}{2} = 4$.

— La 4^{e} valeur est 12 : la médiane vaut 12 minutes.

— Interprétation : au moins la moitié des durées sont inférieures ou égales à 12 minutes, et au moins la moitié y sont supérieures ou égales.

— Remarque : la moyenne vaut $\dfrac{82}{7} \approx 11{,}71$, très proche de la médiane ; la série est assez régulière.

Réponse. Médiane = 12 minutes.

Correction de l'exercice 4 – Médiane d'une série de taille paire

— Ici $N = 8$, nombre pair : la médiane est la demi-somme des valeurs de rangs $\dfrac{N}{2} = 4$ et $\dfrac{N}{2} + 1 = 5$.

— La 4^{e} valeur est 10, la 5^{e} est 11.

$$\text{Me} = \frac{10 + 11}{2} = 10{,}5$$

— La médiane n'est pas forcément une valeur de la série : ici 10,5 n'y figure pas.

Réponse. Me = 10,5.

Correction de l'exercice 5 – Quartiles et écart interquartile

$N = 12$.

— Médiane : N est pair, on prend la demi-somme des rangs 6 et 7, soit $\dfrac{9 + 11}{2} = 10$.

— Q_1 : rang $\dfrac{N}{4} = \dfrac{12}{4} = 3$ (entier), donc Q_1 est la 3^{e} valeur : $Q_1 = 5$.

— Q_3 : rang $\dfrac{3N}{4} = \dfrac{36}{4} = 9$, donc Q_3 est la 9^{e} valeur : $Q_3 = 14$.

— Écart interquartile : $Q_3 - Q_1 = 14 - 5 = 9$.

— Interprétation : la moitié « centrale » des notes est comprise entre 5 et 14, soit une plage de 9 points ; l'étendue, elle, vaut $21 - 2 = 19$.

Réponse. Me = 10 ; $Q_1 = 5$; $Q_3 = 14$; $Q_3 - Q_1 = 9$.

Correction de l'exercice 6 – Série donnée par un tableau d'effectifs

Formule du cours : $\overline{x} = \dfrac{\sum n_i x_i}{N}$.

— Numérateur : $0 \times 5 + 1 \times 8 + 2 \times 12 + 3 \times 3 + 4 \times 2 = 0 + 8 + 24 + 9 + 8 = 49$.

— Effectif total : $5 + 8 + 12 + 3 + 2 = 30$ (cohérent avec l'énoncé).

— Moyenne : $\overline{x} = \dfrac{49}{30} \approx 1{,}63$ frère ou sœur.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Médiane : $N = 30$ est pair, il faut les valeurs de rangs 15 et 16. On calcule les effectifs cumulés croissants : 5 ; 13 ; 25 ; 28 ; 30.
— Les rangs 14 à 25 correspondent à la valeur 2 : les 15^{e} et 16^{e} élèves ont donc 2 frères et sœurs, et Me = 2.

Réponse. $\overline{x} \approx 1{,}63$ et Me = 2.

Correction de l'exercice 7 – Série regroupée en classes

Méthode du cours : dans une série en classes, on ne connaît pas les valeurs exactes ; on remplace chaque classe par son **centre**.

— Centres : 5 ; 15 ; 25 ; 35.
— Somme pondérée : $4 \times 5 + 11 \times 15 + 8 \times 25 + 2 \times 35 = 20 + 165 + 200 + 70 = 455$.
— Effectif total : $4 + 11 + 8 + 2 = 25$.

$$\overline{x} \approx \frac{455}{25} = 18{,}2 \text{ minutes}$$

— C'est une **valeur approchée** : la vraie moyenne dépend de la répartition à l'intérieur de chaque classe.

Réponse. $\overline{x} \approx 18{,}2$ minutes.

Correction de l'exercice 8 – Fréquences et effectifs cumulés

Formule du cours : $f_i = \dfrac{n_i}{N}$, que l'on convertit en pourcentage en multipliant par 100.

— $[0\,;10[$: $\dfrac{4}{25} = 0{,}16$, soit 16 %.
— $[10\,;20[$: $\dfrac{11}{25} = 0{,}44$, soit 44 %.
— $[20\,;30[$: $\dfrac{8}{25} = 0{,}32$, soit 32 %.
— $[30\,;40[$: $\dfrac{2}{25} = 0{,}08$, soit 8 %.
— Contrôle : $16 + 44 + 32 + 8 = 100$ %.
— « Moins de 20 minutes » regroupe les deux premières classes : $16 + 44 = 60$ % des salariés.

Réponse. 16 % ; 44 % ; 32 % ; 8 % · et 60 % des salariés sous les 20 minutes.

Correction de l'exercice 9 – Lire un résumé en cinq nombres

a) $Q_3 - Q_1 = 15 - 8 = 7$ points : la moitié centrale des notes tient dans 7 points.
b) $Q_1 = 8$ signifie qu'au moins 25 % des élèves ont une note inférieure ou égale à 8 ; donc **environ** 75 % des élèves ont au moins 8.
c) Non. $Q_3 = 15$ indique qu'environ 75 % des élèves ont au plus 15 : seuls environ 25 % dépassent 15. C'est la médiane, 11, qui partage la classe en deux moitiés.

Réponse. a) 7 · b) environ 75 % · c) non, environ 25 % seulement.

Correction de l'exercice 10 – Comparer deux séries

— Atelier A : somme $= 98 + 99 + 100 + 101 + 102 = 500$, donc $\overline{x_A} = \dfrac{500}{5} = 100$ g. Étendue : $102 - 98 = 4$ g.
— Atelier B : somme $= 90 + 95 + 100 + 105 + 110 = 500$, donc $\overline{x_B} = 100$ g. Étendue : $110 - 90 = 20$ g.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Les deux moyennes sont **identiques** : un indicateur de position ne suffit donc pas à comparer les ateliers.
— L'étendue de A est cinq fois plus petite : l'atelier A est bien plus **régulier**. C'est exactement le rôle des indicateurs de dispersion.

Réponse. Même moyenne 100 g ; étendues 4 g (A) et 20 g (B) : l'atelier A est plus régulier.

Correction de l'exercice 11 – Effet d'une valeur ajoutée

a) On revient à la définition : la somme des 9 valeurs vaut $9 \times 12 = 108$.

— Nouvelle somme : $108 + 42 = 150$ pour 10 valeurs.

$$\overline{x} = \frac{150}{10} = 15$$

— La moyenne passe de 12 à 15 : une seule valeur extrême la déplace de 3 unités.

b) La médiane, elle, ne dépend que du **rang** central. En ajoutant une valeur au-dessus de toutes les autres, la médiane devient la demi-somme des 5^{e} et 6^{e} valeurs de la nouvelle série : elle bouge très peu.

— Conclusion : la médiane est **robuste** aux valeurs extrêmes, la moyenne ne l'est pas. C'est pourquoi on publie souvent le salaire médian plutôt que le salaire moyen.

Réponse. a) $\overline{x} = 15$ · b) non : la médiane est peu sensible aux valeurs extrêmes.

Correction de l'exercice 12 – Calculer un écart-type

La moyenne vaut $\dfrac{2+4+4+4+5+5+7+9}{8} = \dfrac{40}{8} = 5$.

On calcule ensuite les écarts à la moyenne, -3 ; -1 ; -1 ; -1 ; 0 ; 0 ; 2 ; 4, dont la somme est nulle, puis leurs carrés, 9 ; 1 ; 1 ; 1 ; 0 ; 0 ; 4 ; 16, de somme 32. L'écart-type est la racine de la moyenne de ces carrés :

$$\sigma = \sqrt{\frac{32}{8}} = \sqrt{4} = 2$$

Contrôle de vraisemblance : $\sigma = 2$ est bien plus petit que l'étendue, $9 - 2 = 7$. Les valeurs s'écartent de la moyenne de 2 environ.

Réponse. $\overline{x} = 5$ et $\sigma = 2$.

Correction de l'exercice 13 – Une valeur extrême

La moyenne est la somme des salaires divisée par l'effectif :

$$\overline{x} = \frac{1\,500 + 1\,600 + 1\,700 + 1\,800 + 9\,000}{5} = \frac{15\,600}{5} = 3\,120\ €$$

La série est rangée et l'effectif, 5, est impair : la médiane est la 3^{e} valeur, 1 700 €.

Quatre salariés sur cinq gagnent moins que la moyenne : le salaire de 9 000 € la tire vers le haut, alors qu'il ne déplace pas la médiane. Pour décrire le salaire typique, la **médiane** est plus fidèle.

Réponse. $\overline{x} = 3\,120$ € et Méd = 1 700 € : la médiane décrit mieux le salaire typique.

Correction de l'exercice 14 – Moyenne de deux groupes

On ne fait pas la moyenne des deux moyennes : on revient aux **sommes** de notes. Le premier groupe totalise $10 \times 14 = 140$ points, le second $15 \times 9 = 135$ points.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\overline{x} = \frac{140 + 135}{10 + 15} = \frac{275}{25} = 11$$

La moyenne des deux moyennes, $\frac{14 + 9}{2} = 11{,}5$, serait fausse : le groupe le plus nombreux, qui a la moyenne la plus basse, pèse davantage. **Contrôle** : 11 est bien entre 9 et 14, plus proche de 9.

Réponse. $\overline{x} = 11$.

Correction de l’exercice 15 – Angles d’un diagramme circulaire

Les angles sont proportionnels aux effectifs, et les 60 adhérents occupent le tour complet de 360° : un adhérent correspond à $\frac{360}{60} = 6°$.

$$27 \times 6 = 162° \qquad 18 \times 6 = 108° \qquad 15 \times 6 = 90°$$

Contrôle : $162 + 108 + 90 = 360°$. Les fréquences correspondantes sont 45 %, 30 % et 25 % ; le handball occupe exactement un quart du disque, d’où son angle droit.

Réponse. Football 162°, basket 108°, handball 90°.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).