

Plaquette 3 – Variance, écart-type et mesure de la dispersion

Statistiques descriptives — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Variance et écart-type. Pour une série de N valeurs de moyenne $\bar{x}$:

$$V = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N} \quad \sigma = \sqrt{V}$$

Avec un tableau d'effectifs n_i :

$$V = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + n_p(x_p - \bar{x})^2}{N}$$

Formule de König-Huygens (bien plus rapide à la main) :

$$V = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$$

— « moyenne des carrés moins carré de la moyenne ». Elle donne toujours un résultat ≥ 0 ; un résultat négatif signale une erreur de calcul.

Lecture des deux indicateurs.

Indicateur	Ce qu'il mesure	Sensible aux extrêmes ?
étendue	plage totale	très
écart interquartile	étalement de la moitié centrale	non
écart-type	écart moyen à la moyenne	oui

Effet d'une transformation affine. Si $y = ax + b$ pour toutes les valeurs :

$$\bar{y} = a\bar{x} + b \quad \sigma_y = |a| \sigma_x$$

Ajouter une constante **déplace** la série sans la disperser ; multiplier **dilate** la dispersion.

Coefficient de variation. Pour comparer des séries d'unités différentes :

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \quad (\text{souvent en } \%)$$

Cas particulier. $\sigma = 0$ si et seulement si **toutes** les valeurs sont égales.

Correction de l'exercice 1 – Variance par la définition

- **Étape 1 – moyenne** : $\frac{4 + 6 + 8 + 10 + 12}{5} = \frac{40}{5} = 8 \checkmark$
- **Étape 2 – écarts à la moyenne** : $-4 ; -2 ; 0 ; 2 ; 4 \checkmark$
- **Contrôle** : la somme des écarts vaut 0 — c'est toujours le cas $\checkmark$
- **Étape 3 – carrés des écarts** : $16 ; 4 ; 0 ; 4 ; 16$, de somme 40 $\checkmark$
- **Étape 4 – variance** :

$$V = \frac{40}{5} = 8$$

- **Étape 5 – écart-type** :

$$\sigma = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2,83$$

- **Contrôle par König-Huygens** : carrés des valeurs 16 ; 36 ; 64 ; 100 ; 144, de somme 360.
- **Détail** : $\overline{x^2} = \frac{360}{5} = 72$ et $72 - 8^2 = 72 - 64 = 8$ ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : $\sigma \approx 2,83$ est bien inférieur à l'étendue $12 - 4 = 8$ ✓
- **Interprétation** : les valeurs s'écartent de la moyenne de 2,83 environ ✓
- **Ordre de grandeur** : σ vaut ici $\frac{2,83}{8} \approx 35\%$ de la moyenne ✓

Réponse. $\bar{x} = 8$, $V = 8$, $\sigma = 2\sqrt{2} \approx 2,83$.

Correction de l'exercice 2 - Écart-type d'une série irrégulière

- **Moyenne** : $\frac{2+3+7+8+10}{5} = \frac{30}{5} = 6$ ✓
- **Écarts** : -4 ; -3 ; 1 ; 2 ; 4, de somme 0 ✓
- **Carrés** : 16 ; 9 ; 1 ; 4 ; 16, de somme 46 ✓
- **Variance** :

$$V = \frac{46}{5} = 9,2$$
- **Écart-type** :

$$\sigma = \sqrt{9,2} \approx 3,03$$
- **Contrôle par König-Huygens** : carrés 4 ; 9 ; 49 ; 64 ; 100, de somme 226.
- **Détail** : $\frac{226}{5} = 45,2$ et $45,2 - 36 = 9,2$ ✓
- **Comparaison avec l'exercice 1** : même nombre de valeurs, écart-type plus grand (3,03 contre 2,83) ✓
- **Explication** : la série est ici « creusée » au milieu, avec deux valeurs basses et trois hautes ✓
- **Médiane** : 7 ✓
- **Comparaison** : Méd = 7 > $\bar{x} = 6$, signe d'une queue vers les petites valeurs ✓
- **Étendue** : $10 - 2 = 8$, la même qu'à l'exercice 1, alors que les écarts-types diffèrent — l'étendue est un indicateur bien plus grossier ✓

Réponse. $\bar{x} = 6$, $V = 9,2$, $\sigma \approx 3,03$.

Correction de l'exercice 3 - König-Huygens à l'œuvre

- **Moyenne** : $\frac{1+3+4+4+8}{5} = \frac{20}{5} = 4$ ✓
- **Carrés des valeurs** : 1 ; 9 ; 16 ; 16 ; 64, de somme 106 ✓
- **Moyenne des carrés** : $\overline{x^2} = \frac{106}{5} = 21,2$ ✓
- **Variance** :

$$V = 21,2 - 4^2 = 21,2 - 16 = 5,2$$
- **Écart-type** : $\sigma = \sqrt{5,2} \approx 2,28$ ✓
- **Vérification par la définition** : écarts -3 ; -1 ; 0 ; 0 ; 4 ✓
- **Carrés** : 9 ; 1 ; 0 ; 0 ; 16, de somme 26 ✓
- **Contrôle** : $\frac{26}{5} = 5,2$ ✓ — les deux méthodes concordent
- **Piège classique** : $(\bar{x})^2 = 16$ et $\overline{x^2} = 21,2$ sont **différents** ; les confondre donnerait $V = 0$ ✓

- **Règle** : on a toujours $\overline{x^2} \geq (\bar{x})^2$, avec égalité seulement si toutes les valeurs sont égales ✓
- **Avantage de König-Huygens** : un seul passage sur les données, sans calculer la moyenne d'abord pour chaque écart ✓
- **Contrôle de signe** : $V = 5,2 > 0$ ✓

Réponse. $V = 21,2 - 16 = 5,2$ et $\sigma \approx 2,28$.

Correction de l'exercice 4 - Écart-type avec un tableau d'effectifs

- **Effectif total** : $5 + 10 + 3 + 2 = 20$ ✓
- **Somme pondérée** : $0 \times 5 + 1 \times 10 + 2 \times 3 + 3 \times 2 = 0 + 10 + 6 + 6 = 22$ ✓
- **Moyenne** :

$$\bar{x} = \frac{22}{20} = 1,1 \text{ animal par foyer}$$

- **Somme des carrés pondérée** :
 $0^2 \times 5 + 1^2 \times 10 + 2^2 \times 3 + 3^2 \times 2 = 0 + 10 + 12 + 18 = 40$ ✓
- **Moyenne des carrés** : $\overline{x^2} = \frac{40}{20} = 2$ ✓
- **Variance** :

$$V = 2 - 1,1^2 = 2 - 1,21 = 0,79$$

- **Écart-type** : $\sigma = \sqrt{0,79} \approx 0,89$ ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : l'étendue vaut 3, et $\sigma \approx 0,89$ reste bien en dessous ✓
- **Médiane** : le rang 10,5 tombe dans la valeur 1, donc Méd = 1 ✓
- **Mode** : 1, avec 10 foyers ✓
- **Interprétation** : un foyer « typique » a 1 animal, et l'écart usuel est de l'ordre de 0,9 ✓
- **Coefficient de variation** : $\frac{0,89}{1,1} \approx 81\%$ — une série très dispersée relativement à sa moyenne ✓

Réponse. $\bar{x} = 1,1$ et $\sigma = \sqrt{0,79} \approx 0,89$.

Correction de l'exercice 5 - Même moyenne, dispersions différentes

- **Moyenne de A** : $\frac{50}{5} = 10$ ✓
- **Moyenne de B** : $\frac{5 + 7 + 10 + 13 + 15}{5} = \frac{50}{5} = 10$ ✓
- **Conclusion partielle** : même moyenne ✓
- **Écarts de A** : $-2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2$, carrés de somme 10 ✓
- **Variance de A** : $V_A = \frac{10}{5} = 2$, donc $\sigma_A = \sqrt{2} \approx 1,41$ ✓
- **Écarts de B** : $-5 ; -3 ; 0 ; 3 ; 5$, carrés de somme 68 ✓
- **Variance de B** : $V_B = \frac{68}{5} = 13,6$, donc $\sigma_B = \sqrt{13,6} \approx 3,69$ ✓
- **Rapport** : $\frac{3,69}{1,41} \approx 2,61$ ✓
- **Conclusion** : B est environ deux fois et demie plus dispersée que A ✓
- **Étendues** : 4 pour A contre 10 pour B ✓
- **Médianes** : 10 pour les deux ✓
- **Leçon** : moyenne et médiane identiques ne signifient pas séries identiques — seule la dispersion les sépare ✓

— **Contrôle** : $\sqrt{13,6} \approx 3,6878$ et $\sqrt{2} \approx 1,4142$ ✓

Réponse. Même moyenne 10, mais $\sigma_A = \sqrt{2} \approx 1,41$ contre $\sigma_B = \sqrt{13,6} \approx 3,69$.

Correction de l'exercice 6 - Écart-type nul

— **Formule** : $V = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{12}$ ✓

— **Hypothèse** : $\sigma = 0$, donc $V = 0$ ✓

— **Conséquence** : $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 0$ ✓

— **Argument clé** : c'est une somme de **carrés**, donc de termes tous ≥ 0 ✓

— **Conclusion** : une somme de termes positifs est nulle seulement si **chaque** terme est nul ✓

— **Donc** : $(x_i - \bar{x})^2 = 0$ pour tout i , soit $x_i = \bar{x}$ ✓

— **Réponse** : les 12 valeurs sont **toutes égales** à la moyenne ✓

— **Exemple** : 7 ; 7 ; ... ; 7 donne $\bar{x} = 7$, $V = 0$, $\sigma = 0$ ✓

— **Réciproque** : si toutes les valeurs sont égales, tous les écarts sont nuls, donc $\sigma = 0$ ✓

— **Équivalence** : $\sigma = 0 \Leftrightarrow$ série constante ✓

— **Autres indicateurs** : l'étendue et l'écart interquartile sont eux aussi nuls ✓

— **Contexte concret** : $\sigma = 0$ sur une chaîne de production signifierait des pièces parfaitement identiques — inatteignable en pratique ✓

Réponse. Toutes les valeurs sont égales : $\sigma = 0 \Leftrightarrow$ série constante.

Correction de l'exercice 7 - Ajouter une constante

— **Nouvelle série** : 7 ; 9 ; 11 ; 13 ; 15 ✓

— **Nouvelle moyenne** : $\frac{7+9+11+13+15}{5} = \frac{55}{5} = 11$ ✓

— **Contrôle par la règle** : $\bar{y} = \bar{x} + 3 = 8 + 3 = 11$ ✓

— **Nouveaux écarts** : -4 ; -2 ; 0 ; 2 ; 4 — **exactement les mêmes** ✓

— **Explication** : $y_i - \bar{y} = (x_i + 3) - (\bar{x} + 3) = x_i - \bar{x}$ ✓

— **Nouvelle variance** : $V = \frac{40}{5} = 8$, inchangée ✓

— **Nouvel écart-type** : $\sigma = \sqrt{8} \approx 2,83$, inchangé ✓

— **Règle** : avec $y = x + b$, on a $\bar{y} = \bar{x} + b$ et $\sigma_y = \sigma_x$ ✓

— **Image mentale** : on **translate** la série, sans la comprimer ni l'étirer ✓

— **Contrôle par König-Huygens** : carrés 49 ; 81 ; 121 ; 169 ; 225, de somme 645.

— **Détail** : $\frac{645}{5} = 129$ et $129 - 11^2 = 129 - 121 = 8$ ✓

— **Application pratique** : ajouter 2 points à tout un contrôle remonte la moyenne de 2 sans réduire les écarts entre élèves ✓

Réponse. $\bar{y} = 11$ et $\sigma_y = \sqrt{8} \approx 2,83$ (écart-type **inchangé**).

Correction de l'exercice 8 - Multiplier par une constante

— **Nouvelle série** : 8 ; 12 ; 16 ; 20 ; 24 ✓

— **Nouvelle moyenne** : $\frac{80}{5} = 16$ ✓

— **Contrôle par la règle** : $\bar{y} = 2\bar{x} = 2 \times 8 = 16$ ✓

— **Nouveaux écarts** : -8 ; -4 ; 0 ; 4 ; 8 — **doublés** ✓

— **Carrés** : 64 ; 16 ; 0 ; 16 ; 64, de somme 160 ✓

— **Nouvelle variance** :

$$V = \frac{160}{5} = 32 = 4 \times 8$$

- **Nouvel écart-type** : $\sigma = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \approx 5,66$ ✓
- **Contrôle par la règle** : $\sigma_y = 2\sigma_x = 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ ✓
- **Règle générale** : la variance est multipliée par a^2 , l'écart-type par $|a|$ ✓
- **Piège** : écrire $V_y = 2V_x$ serait faux — c'est $V_y = 4V_x$ ✓
- **Cohérence dimensionnelle** : la variance s'exprime dans l'unité **au carré**, l'écart-type dans l'unité des données ✓
- **Coefficient de variation** : $\frac{5,66}{16} \approx 35\%$, identique à celui de la série initiale — la dispersion **relative** ne change pas ✓

Réponse. $\bar{y} = 16$ et $\sigma_y = 4\sqrt{2} \approx 5,66$ (écart-type **doublé**).

Correction de l'exercice 9 - Transformation affine : Celsius vers Fahrenheit

- **Formule pour la moyenne** : $\bar{F} = 1,8\bar{C} + 32$ ✓
- **Calcul** :

$$\bar{F} = 1,8 \times 20 + 32 = 36 + 32 = 68 \text{ °F}$$
- **Formule pour l'écart-type** : $\sigma_F = |1,8| \times \sigma_C$ ✓
- **Calcul** :

$$\sigma_F = 1,8 \times 5 = 9 \text{ °F}$$
- **Piège** : le +32 n'intervient **pas** dans l'écart-type ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : 20 °C correspond bien à 68 °F ✓
- **Vérification sur une valeur** : 25 °C devient $1,8 \times 25 + 32 = 77 \text{ °F}$ ✓
- **Contrôle des écarts** : $25 - 20 = 5 \text{ °C}$ devient $77 - 68 = 9 \text{ °F}$ — le rapport est bien 1,8 ✓
- **Coefficient de variation en °C** : $\frac{5}{20} = 25\%$ ✓
- **Coefficient de variation en °F** : $\frac{9}{68} \approx 13,2\%$ ✓
- **Leçon importante** : le coefficient de variation **n'est pas** invariant quand la transformation comporte un décalage (+32) ✓
- **Conséquence** : on ne compare jamais des coefficients de variation sur des échelles à origine arbitraire comme le Celsius ✓

Réponse. $\bar{F} = 68 \text{ °F}$ et $\sigma_F = 9 \text{ °F}$.

Correction de l'exercice 10 - Écart-type d'une série en classes

- **Centres** : 5 ; 15 ; 25 ; 35 ✓
- **Carrés des centres** : 25 ; 225 ; 625 ; 1225 ✓
- **Somme pondérée des carrés** :

$$8 \times 25 + 12 \times 225 + 15 \times 625 + 5 \times 1225$$
- **Détail** : $200 + 2700 + 9375 + 6125 = 18400$ ✓
- **Moyenne des carrés** : $\overline{x^2} = \frac{18400}{40} = 460$ ✓
- **Variance par König-Huygens** :

$$V = 460 - 19,25^2 = 460 - 370,5625 = 89,4375$$
- **Écart-type** :

$$\sigma = \sqrt{89,4375} \approx 9,46 \text{ min}$$

- **Contrôle de signe** : $V > 0$ ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : $\sigma \approx 9,46$ est bien inférieur à l'étendue 40 ✓
- **Comparaison à l'écart interquartile** : les cumuls sont 8 ; 20 ; 35 ; 40, donc $Q_1 \approx 10 + 10 \times \frac{10-8}{12} \approx 11,67$ et $Q_3 \approx 20 + 10 \times \frac{30-20}{15} \approx 26,67$ ✓
- **Écart interquartile** : ≈ 15 min ✓
- **Lecture** : l'intervalle $[\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma] \approx [9,8; 28,7]$ couvre l'essentiel de la série ✓
- **Nature du résultat** : comme la moyenne, cet écart-type est une **approximation** liée aux centres de classes ✓

Réponse. $V = 460 - 370,5625 = 89,4375$ et $\sigma \approx 9,46$ minutes.

Correction de l'exercice 11 - Intervalle « moyenne plus ou moins un écart-type »

- **Écart-type** : $\sigma = 2\sqrt{2} \approx 2,8284$ ✓
- **Borne basse** : $8 - 2,8284 \approx 5,17$ ✓
- **Borne haute** : $8 + 2,8284 \approx 10,83$ ✓
- **Intervalle** : $[5,17; 10,83]$ ✓
- **Valeurs concernées** : 6, 8 et 10 ✓
- **Exclues** : $4 < 5,17$ et $12 > 10,83$ ✓
- **Proportion** :

$$\frac{3}{5} = 60\%$$

- **Intervalle à deux écarts-types** : $[8 - 5,66; 8 + 5,66] = [2,34; 13,66]$ ✓
- **Valeurs concernées** : les 5, soit 100 % ✓
- **Interprétation** : la majorité des valeurs se situe à moins d'un écart-type de la moyenne ✓
- **Ordre de grandeur usuel** : sur des séries « en cloche », on trouve environ 68 % des valeurs à un écart-type, et 95 % à deux ✓
- **Prudence** : avec seulement 5 valeurs, ces pourcentages ne sont que des ordres de grandeur ✓
- **Contrôle** : $\frac{3}{5} = 0,6$ ✓

Réponse. Trois valeurs (6, 8, 10) sur cinq, soit 60 %.

Correction de l'exercice 12 - Sensibilité aux valeurs extrêmes

- **Moyenne de S_1** : $\frac{98}{7} = 14$ ✓
- **Carrés** : $100 + 144 + 169 + 196 + 225 + 256 + 324 = 1414$ ✓
- **Variance** : $\frac{1414}{7} - 14^2 = 202 - 196 = 6$, donc $\sigma_1 = \sqrt{6} \approx 2,45$ ✓
- **Médiane de S_1** : la 4^e valeur, soit 14 ✓
- **Quartiles** : rang 1,75 $\rightarrow Q_1 = 12$ et rang 5,25 $\rightarrow Q_3 = 16$, donc un écart interquartile de 4 ✓
- **Moyenne de S_2** : $\frac{130}{7} \approx 18,57$ ✓
- **Carrés** : $100 + 144 + 169 + 196 + 225 + 256 + 2500 = 3590$ ✓
- **Variance** : $\frac{3590}{7} - 18,5714^2 \approx 512,857 - 344,898 \approx 167,96$, donc $\sigma_2 \approx 12,96$ ✓

- **Médiane de S_2** : toujours la 4^e valeur, soit 14 — **inchangée** ✓
- **Quartiles de S_2** : $Q_1 = 12$ et $Q_3 = 16$ — **inchangés** ✓
- **Bilan** : une seule valeur modifiée multiplie l'écart-type par plus de 5 et déplace la moyenne de 4,57, sans toucher la médiane ni l'écart interquartile ✓
- **Contrôle** : $\frac{12,96}{2,45} \approx 5,29$ ✓
- **Conclusion** : face à une valeur aberrante, on privilégie médiane et écart interquartile, qui sont **robustes** ✓

Réponse. S_1 : $\bar{x} = 14$, $\sigma \approx 2,45$ · S_2 : $\bar{x} \approx 18,57$, $\sigma \approx 12,96$ — médiane et écart interquartile inchangés.

Correction de l'exercice 13 - Retrouver une valeur manquante

- **Somme totale** : $S = N\bar{x} = 4 \times 12 = 48$ ✓
- **Somme des trois valeurs connues** : $9 + 11 + 15 = 35$ ✓
- **Quatrième valeur** :

$$x_4 = 48 - 35 = 13$$

- **Série complète** : 9 ; 11 ; 13 ; 15 ✓
- **Vérification** : $\frac{9 + 11 + 13 + 15}{4} = \frac{48}{4} = 12$ ✓
- **Écarts à la moyenne** : -3 ; -1 ; 1 ; 3, de somme 0 ✓
- **Carrés** : 9 ; 1 ; 1 ; 9, de somme 20 ✓
- **Variance** :

$$V = \frac{20}{4} = 5$$

- **Écart-type** : $\sigma = \sqrt{5} \approx 2,24$ ✓
- **Contrôle par König-Huygens** : carrés 81 ; 121 ; 169 ; 225, de somme 596.
- **Détail** : $\frac{596}{4} = 149$ et $149 - 144 = 5$ ✓
- **Remarque** : la série est arithmétique de raison 2, donc parfaitement régulière ✓
- **Médiane** : $\frac{11 + 13}{2} = 12$, égale à la moyenne — cohérent avec cette symétrie ✓

Réponse. $x_4 = 13$ et $\sigma = \sqrt{5} \approx 2,24$.

Correction de l'exercice 14 - Coefficient de variation

- **Obstacle** : les unités diffèrent, on ne peut pas comparer 5 s et 16 g ✓
- **Outil adapté** : le coefficient de variation $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$, qui est **sans unité** ✓
- **Pour A** :

$$CV_A = \frac{5}{50} = 0,1 = 10\%$$

- **Pour B** :

$$CV_B = \frac{16}{200} = 0,08 = 8\%$$

- **Comparaison** : $10\% > 8\%$ ✓
- **Conclusion** : c'est la série A qui est **relativement** la plus dispersée ✓
- **Piège évité** : en valeur absolue, $\sigma_B = 16$ est plus de trois fois $\sigma_A = 5$ ✓
- **Interprétation** : une durée s'écarte typiquement de 10 % de sa valeur moyenne, une masse de 8 % ✓

- **Précision de mesure** : B est donc le procédé le plus **régulier** ✓
- **Vérification par changement d'unité** : exprimer B en kg donne $\bar{x} = 0,2$ et $\sigma = 0,016$, donc toujours $CV_B = 8\%$ ✓
- **Propriété** : le coefficient de variation est invariant par multiplication, mais **pas** par ajout d'une constante ✓
- **Limite d'usage** : il n'a de sens que pour des grandeurs positives dont le zéro est absolu (durées, masses, prix) ✓

Réponse. $CV_A = 10\%$ contre $CV_B = 8\%$: A est relativement plus dispersée.

Correction de l'exercice 15 - Deux façons de remonter une moyenne

- **Option 1 — ajouter 1,4** : $\bar{y} = 9,6 + 1,4 = 11$ ✓
- **Écart-type** : $\sigma_y = 2,5$, **inchangé** ✓
- **Option 2 — multiplier par $a = \frac{11}{9,6}$** : $a \approx 1,1458$ ✓
- **Moyenne** : $\bar{y} = 1,1458 \times 9,6 = 11$ ✓
- **Écart-type** : $\sigma_y = 1,1458 \times 2,5 \approx 2,86$ ✓
- **Bilan** : les deux options donnent la **même moyenne**, mais pas la même dispersion ✓
- **Effet de l'option 1** : tous les élèves gagnent exactement 1,4 point ✓
- **Effet de l'option 2** : le gain est **proportionnel** à la note ✓
- **Exemple à 5** : option 1 donne 6,4 ; option 2 donne 5,73 ✓
- **Exemple à 16** : option 1 donne 17,4 ; option 2 donne 18,33 ✓
- **Contrôle** : $1,1458 \times 5 = 5,729$ ✓ et $1,1458 \times 16 = 18,333$ ✓
- **Conséquence** : l'option 2 **creuse** les écarts, l'option 1 les conserve ✓
- **Point de bascule** : les deux options coïncident pour la note x telle que $1,1458x = x + 1,4$, soit $x \approx 9,6$ — la moyenne elle-même ✓
- **Contrôle du dépassement de 20** : l'option 1 fait sortir du barème tout élève au-dessus de 18,6 ; l'option 2 tout élève au-dessus de 17,45 ✓

Réponse. Même moyenne 11, mais σ reste 2,5 avec l'ajout et passe à $\approx 2,86$ avec la multiplication.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : contrôle de production

- a) **Somme des écarts** : $-4 - 2 + 0 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 - 1 - 3 = 0$ ✓
- **Diamètre moyen** : les écarts se compensant exactement,

$$\bar{x} = 20,00 \text{ mm}$$
 - **Carrés des écarts** (en centièmes) : 16 ; 4 ; 0 ; 0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 1 ; 9 ✓
 - **Somme** : 60 ✓
 - **Variance en centièmes de mm au carré** : $\frac{60}{10} = 6$ ✓
 - **Retour en millimètres** : un centième vaut 0,01 mm, donc on multiplie la variance par $0,01^2 = 0,0001$:

$$V = 6 \times 0,0001 = 0,0006 \text{ mm}^2$$
 - **Écart-type** :

$$\sigma = \sqrt{0,0006} \approx 0,0245 \text{ mm}$$
 - **Contrôle** : $0,0245^2 \approx 0,00060$ ✓
 - **Contrôle par la règle de transformation** : $\sigma_y = |a|\sigma_x$ avec $a = 0,01$ et $\sigma_x = \sqrt{6} \approx 2,449$ donne 0,0245 ✓

b) **Intervalle de tolérance** : $[19,95; 20,05]$ ✓

- **Écart le plus grand** : 4 centièmes, soit 0,04 mm ✓
- **Diamètre extrême** : 20,04 mm, dans l'intervalle ✓
- **Conclusion** : les 10 pièces sont **conformes** ✓
- **Marge** : $0,05 - 0,04 = 0,01$ mm, soit une réserve étroite ✓
- **Repère statistique** : $\bar{x} \pm 2\sigma \approx [19,951; 20,049]$ tient tout juste dans la tolérance ✓

c) **Machine 2** : $\bar{x} = 20,02$ mm, décalée de 0,02 mm ✓

- **Dispersion** : $\sigma = 0,010$ mm, soit **moins de la moitié** de celle de la machine 1 ✓
- **Intervalle** $\bar{x} \pm 2\sigma$: $[20,00; 20,04]$, entièrement dans la tolérance, avec une marge de 0,01 mm de chaque côté ✓
- **Comparaison** : la machine 1 est bien centrée mais dispersée ; la machine 2 est décalée mais régulière ✓
- **Choix industriel** : la machine 2, car un **décalage se corrige** par un réglage alors qu'une dispersion excessive exige de changer de procédé ✓
- **Après recentrage de la machine 2** : $\bar{x} = 20,00$ et $\sigma = 0,010$, donc $\bar{x} \pm 2\sigma = [19,98; 20,02]$ — une marge cinq fois plus confortable ✓
- **Coefficient de variation** : $\frac{0,0245}{20} \approx 0,12\%$ contre $\frac{0,010}{20,02} \approx 0,05\%$ ✓

Réponse. a) $\bar{x} = 20,00$ mm et $\sigma = \sqrt{0,0006} \approx 0,0245$ mm · b) oui, le pire écart est $0,04 < 0,05$ mm · c) la machine 2, dont le décalage se règle alors qu'une dispersion ne se règle pas.