Plaquette 2 – Angles remarquables, relations et valeurs exactes

Trigonométrie (triangle rectangle) — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les trois rapports. Dans un triangle rectangle, pour un angle aigu α :

$$\cos\alpha = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} \qquad \sin\alpha = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}} \qquad \tan\alpha = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$$

Table des valeurs exactes.

α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$

D'où viennent ces valeurs ?

— Le **demi-carré** de côté 1 a une diagonale $\sqrt{2}$: d'où les valeurs de 45°.

— Le **demi-triangle équilatéral** de côté 2 a des côtés 1, $\sqrt{3}$ et 2 : d'où les valeurs de 30° et 60°.

Trois relations à connaître.

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$$

La première vient de Pythagore, la troisième du fait que les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont **complémentaires**.

Encadrements utiles. Pour un angle aigu, $0 < \cos\alpha < 1$ et $0 < \sin\alpha < 1$, alors que $\tan\alpha$ peut prendre **toute** valeur positive.

Sens de variation. Quand α augmente de 0° à 90°, $\cos\alpha$ **décroît** de 1 à 0, tandis que $\sin\alpha$ et $\tan\alpha$ **croissent**.

Piège d'arrondi. On garde les valeurs exactes ($\frac{\sqrt{3}}{2}$, et non 0,87) jusqu'au dernier calcul.

Correction de l'exercice 1 – Le demi-carré

La diagonale coupe le carré en deux triangles rectangles **isocèles** : les côtés de l'angle droit mesurent 1, et les deux angles aigus sont égaux, donc valent 45° chacun. Par le théorème de Pythagore, l'hypoténuse (la diagonale) mesure $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Pour l'angle de 45°, le côté adjacent et le côté opposé mesurent tous deux 1 :

$$\cos 45° = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$$

et $\tan 45° = \frac{1}{1} = 1$. Le cosinus et le sinus sont égaux parce que les deux côtés de l'angle droit sont égaux. **Contrôle** : $\cos^2 45° + \sin^2 45° = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $\cos 45° = \sin 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$ et $\tan 45° = 1$.

Correction de l'exercice 2 – Le demi-triangle équilatéral

La hauteur issue d'un sommet d'un triangle équilatéral est aussi médiane : elle coupe la base de longueur 2 en deux segments de 1. On obtient un triangle rectangle d'hypoténuse 2 (un côté du triangle), de petit côté 1, et dont les angles aigus valent 60° (angle du triangle équilatéral) et 30° (la moitié, car la hauteur est aussi bissectrice). La hauteur vaut, par Pythagore, $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

Pour l'angle de 60°, le côté adjacent vaut 1 et le côté opposé $\sqrt{3}$:

$$\cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

Pour l'angle de 30°, les rôles sont échangés : $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$ et $\tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. On remarque que $\cos 30° = \sin 60°$: le côté adjacent à l'un des angles est opposé à l'autre. **Contrôle** : $\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} = 1$.

Réponse. $\cos 30° = \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30° = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$, $\tan 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $\tan 60° = \sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 3 – Longueurs exactes avec 30°

Le côté opposé à l'angle de 30° s'obtient avec le sinus, le côté adjacent avec le cosinus :

$$\text{opposé} = 10 \times \sin 30° = 10 \times \frac{1}{2} = 5 \text{ cm} \qquad \text{adjacent} = 10 \times \cos 30° = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

soit environ 8,66 cm. On retrouve que le côté opposé à l'angle de 30° mesure la **moitié** de l'hypoténuse : ce triangle est un demi-triangle équilatéral de côté 10. **Contrôle** par Pythagore : $5^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2 = 25 + 75 = 100 = 10^2$.

Réponse. 5 cm et $5\sqrt{3} \approx 8{,}66$ cm.

Correction de l'exercice 4 – Retrouver un sinus à partir d'un cosinus

On utilise la relation $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$:

$$\sin^2\alpha = 1 - 0{,}6^2 = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$$

L'angle étant aigu, son sinus est positif : $\sin\alpha = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$. Ensuite $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{0{,}8}{0{,}6} = \dfrac{4}{3} \approx 1{,}33$.

On reconnaît le triangle rectangle de côtés 3, 4, 5 : pour l'angle α, l'adjacent vaut 3, l'opposé 4 et l'hypoténuse 5, et l'on a bien $\dfrac{3}{5} = 0{,}6$ et $\dfrac{4}{5} = 0{,}8$. La calculatrice donne $\alpha \approx 53{,}1°$.

Réponse. $\sin\alpha = 0{,}8$ et $\tan\alpha = \dfrac{4}{3} \approx 1{,}33$ (triangle 3-4-5).

Correction de l'exercice 5 – Sinus connu, longueurs à trouver

Le côté opposé vaut hypoténuse fois sinus : $26 \times \dfrac{5}{13} = 10$ cm. Pour le cosinus, on utilise la relation fondamentale, avec $\cos\alpha > 0$ puisque l'angle est aigu :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \quad \text{donc} \quad \cos\alpha = \frac{12}{13} \approx 0{,}923$$

Le côté adjacent vaut alors $26 \times \frac{12}{13} = 24$ cm. **Contrôle** par Pythagore : $10^2 + 24^2 = 100 + 576 = 676 = 26^2$. Les côtés 10, 24, 26 sont le double du triangle classique 5, 12, 13.

Réponse. 10 cm et 24 cm, avec $\cos\alpha = \frac{12}{13} \approx 0{,}923$.

Correction de l’exercice 6 – Diagonale d’un carré et de son double

La diagonale coupe le carré en deux triangles rectangles isocèles, d’hypoténuse 12 cm et d’angles 45°. Le côté c est adjacent à l’angle de 45° :

$$c = 12 \times \cos 45° = 12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2} \approx 8{,}49 \text{ cm}$$

L’aire vaut $c^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 = 36 \times 2 = 72$ cm². **Contrôle** : un carré est aussi un losange, dont l’aire est le demi-produit des diagonales, $\frac{12 \times 12}{2} = 72$ cm².

Réponse. Côté $6\sqrt{2} \approx 8{,}49$ cm et aire 72 cm².

Correction de l’exercice 7 – Hauteur d’un triangle équilatéral

La hauteur coupe le triangle équilatéral en deux triangles rectangles dont l’hypoténuse est le côté c et dont l’angle à la base vaut 60°. La hauteur est le côté opposé à cet angle, donc $9 = c \times \sin 60° = c \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ et

$$c = \frac{18}{\sqrt{3}} = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3} \approx 10{,}39 \text{ cm}$$

L’aire vaut $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{6\sqrt{3} \times 9}{2} = 27\sqrt{3} \approx 46{,}77$ cm². **Contrôle** par Pythagore dans le demi-triangle : $\left(3\sqrt{3}\right)^2 + 9^2 = 27 + 81 = 108 = \left(6\sqrt{3}\right)^2$.

Réponse. Côté $6\sqrt{3} \approx 10{,}39$ cm et aire $27\sqrt{3} \approx 46{,}77$ cm².

Correction de l’exercice 8 – Comparer des tangentes

Dans un triangle rectangle, quand un angle aigu augmente, son côté opposé grandit et son côté adjacent rapetisse : la tangente, quotient des deux, **augmente**. Donc $\tan 20° < \tan 45° < \tan 70°$, avec $\tan 45° = 1$.

Les angles de 20° et 70° sont les deux angles aigus d’un même triangle rectangle : le côté adjacent à l’un est opposé à l’autre, donc $\cos 20° = \sin 70°$. Ce nombre est inférieur à 1, mais proche de 1 car l’angle est petit. Enfin $\tan 20° = \frac{\sin 20°}{\cos 20°}$ est petit, puisque $\sin 20°$ est petit.

$$\tan 20° < \cos 20° = \sin 70° < \tan 45° < \tan 70°$$

Contrôle à la calculatrice : $0{,}364 < 0{,}940 = 0{,}940 < 1 < 2{,}747$.

Réponse. $\tan 20° \approx 0{,}364 < \cos 20° = \sin 70° \approx 0{,}940 < \tan 45° = 1 < \tan 70° \approx 2{,}748$.

Correction de l’exercice 9 – Angles complémentaires

Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires : $\alpha + \beta = 90°$. Le côté opposé à α est adjacent à β, donc $\cos\beta = \sin\alpha = 0{,}28$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Pour $\cos\alpha$, la relation fondamentale donne $\cos^2\alpha = 1 - 0{,}28^2 = 1 - 0{,}0784 = 0{,}9216$, d'où $\cos\alpha = 0{,}96$ (positif, l'angle étant aigu). Par le même échange des rôles, $\sin\beta = \cos\alpha = 0{,}96$. Enfin

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}28}{0{,}96} = \frac{28}{96} = \frac{7}{24} \approx 0{,}292$$

On reconnaît le triangle de côtés 7, 24, 25 : $\frac{7}{25} = 0{,}28$ et $\frac{24}{25} = 0{,}96$.

Réponse. $\cos\beta = 0{,}28$, $\sin\beta = \cos\alpha = 0{,}96$ et $\tan\alpha = \frac{7}{24} \approx 0{,}292$.

Correction de l'exercice 10 – Deux triangles accolés

Dans le triangle ABC rectangle en B, $[AB]$ est adjacent à l'angle de $60°$ et $[BC]$ lui est opposé, d'où la tangente :

$$BC = AB \times \tan 60° = 6\sqrt{3} \approx 10{,}39 \text{ cm}$$

L'hypoténuse vaut $AC = \frac{AB}{\cos 60°} = \frac{6}{0{,}5} = 12$ cm. Dans le second triangle ACD, rectangle en C, l'angle en A vaut $45°$: il est rectangle isocèle, donc $CD = AC = 12$ cm. La longueur totale vaut $BC + CD = 6\sqrt{3} + 12 \approx 22{,}39$ cm.

Contrôle par Pythagore dans ABC : $6^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2 = 36 + 108 = 144 = 12^2$.

Réponse. $BC = 6\sqrt{3} \approx 10{,}39$ cm, $CD = 12$ cm, soit une longueur totale de $6\sqrt{3} + 12 \approx 22{,}39$ cm.

Correction de l'exercice 11 – Hauteur d'un arbre par deux visées

On note h la hauteur de l'arbre, B le second point de visée et d la distance de B au pied de l'arbre. Depuis B, l'angle vaut $45°$ et $\tan 45° = 1$, donc $h = d$. Depuis le premier point, la distance au pied vaut $d + 20 = h + 20$, d'où

$$\tan 30° = \frac{h}{h+20} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}(h+20) = h \Leftrightarrow \sqrt{3}\,h + 20\sqrt{3} = 3h \Leftrightarrow h = \frac{20\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

On multiplie numérateur et dénominateur par $3 + \sqrt{3}$:

$$h = \frac{20\sqrt{3}\left(3+\sqrt{3}\right)}{9-3} = \frac{60\sqrt{3}+60}{6} = 10\sqrt{3} + 10 \approx 27{,}32 \text{ m}.$$

Contrôle : depuis le premier point, à 47,32 m du pied, $\frac{27{,}32}{47{,}32} \approx 0{,}577 \approx \tan 30°$. Cette méthode évite de mesurer la distance jusqu'au pied de l'arbre, souvent inaccessible.

Réponse. $h = 10\sqrt{3} + 10 \approx 27{,}32$ m.

Correction de l'exercice 12 – Losange et trigonométrie

Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires, se coupent en leur milieu et partagent ses angles en deux. Elles découpent le losange en quatre triangles rectangles d'hypoténuse 10 cm (un côté) et d'angles $30°$ et $60°$.

La demi-diagonale opposée à l'angle de $30°$ vaut $10 \times \sin 30° = 5$ cm, celle opposée à l'angle de $60°$ vaut $10 \times \sin 60° = 5\sqrt{3}$ cm. Les diagonales mesurent donc 10 cm et $10\sqrt{3} \approx 17{,}32$ cm, et l'aire vaut

$$A = \frac{d \times D}{2} = \frac{10 \times 10\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} \approx 86{,}60 \text{ cm}^2$$

La petite diagonale est égale au côté : elle partage le losange en deux triangles équilatéraux. **Contrôle** : deux triangles équilatéraux de côté 10 ont une aire de

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$2 \times \dfrac{10 \times 5\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}$ cm².

Réponse. Diagonales 10 cm et $10\sqrt{3} \approx 17{,}32$ cm ; aire $50\sqrt{3} \approx 86{,}60$ cm².

Correction de l'exercice 13 – Pente en pourcentage

Une pente de 12 % signifie une montée de 12 m pour 100 m parcourus **horizontalement** : c'est la tangente de l'angle. Donc $\tan\alpha = 0{,}12$ et la calculatrice donne $\alpha \approx 6{,}84°$.

Les 3 km sont mesurés le long de la route, qui est l'hypoténuse : le dénivelé est le côté opposé à l'angle.

$$\text{dénivelé} = 3000 \times \sin\alpha \approx 3000 \times 0{,}1191 \approx 357{,}3 \text{ m}$$

Le calcul rapide $3000 \times 0{,}12 = 360$ m est une bonne approximation pour une pente faible, l'écart n'étant que de 2,7 m. Il devient faux pour une forte pente : à 100 %, l'angle vaut 45° et le dénivelé sur 3 km n'est que de $3000 \times \sin 45° \approx 2121$ m, et non 3000 m.

Réponse. $\alpha \approx 6{,}84°$ et un dénivelé de $\approx 357{,}3$ m sur 3 km de route.

Correction de l'exercice 14 – Rationaliser et simplifier

On remplace chaque rapport par sa valeur exacte. Pour la première expression, diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse :

$$\frac{\sin 60°}{\tan 30°} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2}$$

Pour la deuxième, $\cos 30° \times \tan 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = \dfrac{3}{2}$, car $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$. Pour la troisième, $\dfrac{1}{\tan 45°} + \sin 30° = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Les trois expressions valent $\dfrac{3}{2}$. Les deux premières ne sont pas égales par hasard : $\cos 30° = \sin 60°$ et $\tan 60° = \dfrac{1}{\tan 30°}$. **Contrôle** numérique : $\dfrac{0{,}8660}{0{,}5774} \approx 1{,}50$.

Réponse. Les trois valent $\dfrac{3}{2}$.

Correction de l'exercice 15 – Trapèze rectangle

En traçant la hauteur depuis l'extrémité de la petite base, on découpe le trapèze en un rectangle et un triangle rectangle. La base de ce triangle vaut la différence des bases, $14 - 8 = 6$ cm, et son angle à la base vaut 60° ; la hauteur h du trapèze est le côté opposé à cet angle :

$$h = 6 \times \tan 60° = 6\sqrt{3} \approx 10{,}39 \text{ cm}$$

L'aire du trapèze vaut $\dfrac{(B+b) \times h}{2} = \dfrac{(14+8) \times 6\sqrt{3}}{2} = 66\sqrt{3} \approx 114{,}32$ cm². **Contrôle** par découpage : le rectangle a une aire de $8 \times 6\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$ et le triangle $\dfrac{6 \times 6\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$, soit $66\sqrt{3}$ au total.

Réponse. Hauteur $6\sqrt{3} \approx 10{,}39$ cm et aire $66\sqrt{3} \approx 114{,}32$ cm².

Correction de l'exercice 16 – Distance inaccessible

Le triangle ABC est rectangle en A, puisqu'on a marché perpendiculairement à (AB). Pour l'angle en C, $[AC]$ est le côté adjacent (50 m connus) et $[AB]$ le côté opposé (la largeur cherchée) : c'est la tangente.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$AB = AC \times \tan 72° \approx 50 \times 3{,}0777 \approx 153{,}9 \text{ m}$$

Le résultat est sensible à la mesure de l'angle : avec 73° au lieu de 72°, on trouverait environ 163,5 m, soit près de 10 m d'écart. C'est parce que la tangente varie très vite près de 90° ; on obtient une mesure plus fiable en marchant plus loin, pour viser sous un angle proche de 45°.

Réponse. $AB = 50 \tan 72° \approx 153{,}88$ m.

Correction de l'exercice 17 – Synthèse : un toit à deux pentes

a) La hauteur du faîtage partage la coupe en deux triangles rectangles de base 6 m (la demi-base) et d'angle 35°. La hauteur est le côté opposé, le versant l'hypoténuse :

$$h = 6 \times \tan 35° \approx 4{,}20 \text{ m} \qquad \ell = \frac{6}{\cos 35°} \approx 7{,}32 \text{ m}$$

b) Chaque versant est un rectangle de ℓ sur 18 m, soit $\approx 131{,}9$ m², et la toiture mesure $2 \times 131{,}9 \approx 263{,}7$ m². C'est plus que les $12 \times 18 = 216$ m² au sol, puisque le versant est plus long que la demi-base.

c) Les combles forment un prisme dont la base est le triangle de la coupe, d'aire $\dfrac{12 \times 4{,}20}{2} \approx 25{,}2$ m² :

$$V \approx 25{,}21 \times 18 \approx 453{,}7 \text{ m}^3$$

d) Avec une hauteur de 5 m pour une demi-base de 6 m, $\tan \alpha = \dfrac{5}{6} \approx 0{,}833$, d'où $\alpha \approx 39{,}8°$. Le versant mesure alors $\sqrt{36 + 25} = \sqrt{61} \approx 7{,}81$ m : la toiture augmente d'environ 6,6 %, mais le volume passe à $\dfrac{12 \times 5}{2} \times 18 = 540$ m³, soit 19 % de plus.

Réponse. a) $h \approx 4{,}20$ m et versant $\approx 7{,}32$ m · b) $\approx 263{,}7$ m² · c) $\approx 453{,}7$ m³ · d) $\alpha \approx 39{,}8°$ (car $\tan \alpha = \dfrac{5}{6}$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).