

Plaquette 2 - Angles remarquables, relations et valeurs exactes

Trigonométrie (triangle rectangle) — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les trois rapports. Dans un triangle rectangle, pour un angle aigu α :

$$\cos \alpha = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} \quad \sin \alpha = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}} \quad \tan \alpha = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$$

Table des valeurs exactes.

α	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\tan \alpha$
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$

D'où viennent ces valeurs ?

- Le **demi-carré** de côté 1 a une diagonale $\sqrt{2}$: d'où les valeurs de 45° .
- Le **demi-triangle équilatéral** de côté 2 a des côtés 1, $\sqrt{3}$ et 2 : d'où les valeurs de 30° et 60° .

Trois relations à connaître.

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

La première vient de Pythagore, la troisième du fait que les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont **complémentaires**.

Encadrements utiles. Pour un angle aigu, $0 < \cos \alpha < 1$ et $0 < \sin \alpha < 1$, alors que $\tan \alpha$ peut prendre **toute** valeur positive.

Sens de variation. Quand α augmente de 0° à 90° , $\cos \alpha$ **décroît** de 1 à 0, tandis que $\sin \alpha$ et $\tan \alpha$ **croissent**.

Piège d'arrondi. On garde les valeurs exactes ($\frac{\sqrt{3}}{2}$, et non 0,87) jusqu'au dernier calcul.

Correction de l'exercice 1 - Le demi-carré

- **Figure obtenue** : un triangle rectangle isocèle ✓
- **Côtés de l'angle droit** : 1 et 1 ✓
- **Hypoténuse** : la diagonale, $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ ✓
- **Angles aigus** : 45° chacun, par symétrie ✓
- **Contrôle** : $45 + 45 + 90 = 180^\circ$ ✓
- **Cosinus** : $\frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ✓
- **Forme rationalisée** :

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071$$

- **Sinus** : par symétrie, le côté opposé vaut aussi 1 ✓
- **Donc** : $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓
- **Égalité remarquable** : $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$ ✓
- **Explication** : $45^\circ = 90^\circ - 45^\circ$, l'angle est son propre complémentaire ✓
- **Tangente** : $\frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{1}{1} = 1$ ✓
- **Contrôle par la relation** : $\frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = 1$ ✓
- **Contrôle de Pythagore** : $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times 2 = \frac{2}{4} \times 2 = 1$ ✓
- **Rationalisation détaillée** : $\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓
- **Contrôle numérique** : $\frac{1,41421}{2} \approx 0,70711$ ✓

Réponse. $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$ et $\tan 45^\circ = 1$.

Correction de l'exercice 2 - Le demi-triangle équilatéral

- **Figure obtenue** : un triangle rectangle ✓
- **Hypoténuse** : un côté du triangle équilatéral, soit 2 ✓
- **Petit côté** : la moitié de la base, soit 1 ✓
- **Hauteur** : $\sqrt{4-1} = \sqrt{3} \approx 1,732$ ✓
- **Angles** : 30° , 60° et 90° ✓
- **Justification** : la hauteur coupe l'angle de 60° en deux ✓
- **Pour l'angle de 60°** : l'adjacent vaut 1, l'opposé $\sqrt{3}$ ✓
- **Résultats** :

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

- **Pour l'angle de 30°** : l'adjacent vaut $\sqrt{3}$, l'opposé 1 ✓
- **Résultats** :

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- **Relation de complémentarité** : $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$ et $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ ✓
- **Contrôle de Pythagore pour 30°** : $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$ ✓
- **Contrôle de la tangente** : $\frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ✓
- **Valeurs numériques** : $\cos 30^\circ \approx 0,8660$ et $\tan 30^\circ \approx 0,5774$ ✓
- **Contrôle** : $\tan 30^\circ \times \tan 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3} = 1$ ✓
- **Règle générale** : $\tan \alpha \times \tan (90^\circ - \alpha) = 1$ ✓

Réponse. $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 3 - Longueurs exactes avec 30°

— **Côté opposé à 30°** : $10 \times \sin 30^\circ = 10 \times \frac{1}{2} \checkmark$

— **Résultat** :

$$5 \text{ cm}$$

— **Côté adjacent à 30°** : $10 \times \cos 30^\circ = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \checkmark$

— **Résultat** :

$$5\sqrt{3} \approx 8,660 \text{ cm}$$

— **Contrôle par Pythagore** : $25 + 75 = 100 \checkmark$

— **Cohérence** : c'est bien le carré de l'hypoténuse $\checkmark$

— **Contrôle par la tangente** : $\frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ \checkmark$

— **Propriété remarquable** : le côté opposé à 30° vaut la **moitié** de l'hypoténuse $\checkmark$

— **Explication** : c'est le demi-triangle équilatéral $\checkmark$

— **Troisième angle** : $60^\circ \checkmark$

— **Contrôle** : $10 \times \sin 60^\circ = 5\sqrt{3} \checkmark$

— **Aire du triangle** : $\frac{5 \times 5\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2} \approx 21,651 \text{ cm}^2 \checkmark$

— **Périmètre** : $10 + 5 + 5\sqrt{3} \approx 23,660 \text{ cm} \checkmark$

— **Hauteur relative à l'hypoténuse** : $\frac{2 \times 21,651}{10} \approx 4,330 \text{ cm} \checkmark$

— **Contrôle** : $\frac{5\sqrt{3}}{2} \approx 4,330 \text{ cm} \checkmark$

— **Rayon du cercle circonscrit** : 5 cm, la moitié de l'hypoténuse $\checkmark$

Réponse. 5 cm et $5\sqrt{3} \approx 8,66 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 4 - Retrouver un sinus à partir d'un cosinus

— **Relation fondamentale** : $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \checkmark$

— **Substitution** : $0,36 + \sin^2 \alpha = 1 \checkmark$

— **Donc** : $\sin^2 \alpha = 0,64 \checkmark$

— **Choix du signe** : α est aigu, donc $\sin \alpha > 0 \checkmark$

— **Résultat** :

$$\sin \alpha = 0,8$$

— **Tangente** : $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,8}{0,6} \checkmark$

— **Résultat** :

$$\tan \alpha = \frac{4}{3} \approx 1,3333$$

— **Triplet reconnaissable** : 3-4-5 $\checkmark$

— **Interprétation** : le triangle a pour côtés 3, 4 et 5 (à un facteur près) $\checkmark$

— **Contrôle** : $\cos \alpha = \frac{3}{5} = 0,6 \checkmark$ et $\sin \alpha = \frac{4}{5} = 0,8 \checkmark$

— **Mesure de l'angle** : $\alpha \approx 53,13^\circ \checkmark$

— **Contrôle** : $\cos 53,13^\circ \approx 0,600 \checkmark$

— **Angle complémentaire** : $\approx 36,87^\circ \checkmark$

- **Ses rapports** : $\cos \approx 0,8$, $\sin \approx 0,6$ et $\tan = 0,75$ ✓
- **Contrôle** : $\frac{4}{3} \times \frac{3}{4} = 1$ ✓
- **Vérification de Pythagore** : $0,36 + 0,64 = 1$ ✓

Réponse. $\sin \alpha = 0,8$ et $\tan \alpha = \frac{4}{3} \approx 1,33$ (triangle 3-4-5).

Correction de l'exercice 5 - Sinus connu, longueurs à trouver

- **Côté opposé** : $26 \times \frac{5}{13} = 10$ cm ✓
- **Cosinus par la relation fondamentale** : $\cos^2 \alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$ ✓
- **Résultat** :

$$\cos \alpha = \frac{12}{13} \approx 0,9231$$

- **Côté adjacent** : $26 \times \frac{12}{13} = 24$ cm ✓
- **Contrôle par Pythagore** : $100 + 576 = 676 = 26^2$ ✓
- **Triplet reconnaissable** : 5-12-13, ici doublé en 10-24-26 ✓
- **Tangente** : $\frac{10}{24} = \frac{5}{12} \approx 0,4167$ ✓
- **Contrôle** : $\frac{5/13}{12/13} = \frac{5}{12}$ ✓
- **Mesure de l'angle** : $\alpha \approx 22,62^\circ$ ✓
- **Contrôle** : $\sin 22,62^\circ \approx 0,3846$, et $\frac{5}{13} \approx 0,3846$ ✓
- **Angle complémentaire** : $\approx 67,38^\circ$ ✓
- **Aire** : $\frac{10 \times 24}{2} = 120$ cm² ✓
- **Périmètre** : $10 + 24 + 26 = 60$ cm ✓
- **Rayon du cercle inscrit** : $\frac{2 \times 120}{60} = 4$ cm ✓
- **Contrôle par la formule du triangle rectangle** : $\frac{10 + 24 - 26}{2} = 4$ cm ✓
- **Rayon du cercle circonscrit** : 13 cm ✓

Réponse. 10 cm et 24 cm, avec $\cos \alpha = \frac{12}{13} \approx 0,923$.

Correction de l'exercice 6 - Diagonale d'un carré et de son double

- **Relation dans le demi-carré** : côté = diagonale $\times \cos 45^\circ$ ✓
- **Calcul** : $12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2} \approx 8,485$ cm ✓
- **Contrôle par Pythagore** : $(6\sqrt{2})^2 \times 2 = 72 \times 2 = 144 = 12^2$ ✓
- **Aire du carré** :

$$A = (6\sqrt{2})^2 = 72 \text{ cm}^2$$

- **Contrôle par la formule de la diagonale** : $\frac{d^2}{2} = \frac{144}{2} = 72 \text{ cm}^2$ ✓
- **Cohérence** : les deux méthodes concordent ✓
- **Périmètre** : $4 \times 6\sqrt{2} = 24\sqrt{2} \approx 33,941$ cm ✓
- **Rapport diagonale sur côté** : $\sqrt{2} \approx 1,414$ ✓
- **Angle de la diagonale avec un côté** : 45° ✓

- **Contrôle** : $\tan 45^\circ = 1$, les deux côtés de l'angle droit étant égaux ✓
- **Rayon du cercle circonscrit** : 6 cm, la moitié de la diagonale ✓
- **Rayon du cercle inscrit** : $3\sqrt{2} \approx 4,243$ cm, la moitié du côté ✓
- **Rapport de ces rayons** : $\sqrt{2}$ ✓
- **Aire du disque circonscrit** : $36\pi \approx 113,10$ cm² ✓
- **Aire du disque inscrit** : $18\pi \approx 56,55$ cm² ✓
- **Encadrement** : $56,55 < 72 < 113,10$ ✓

Réponse. Côté $6\sqrt{2} \approx 8,49$ cm et aire 72 cm².

Correction de l'exercice 7 - Hauteur d'un triangle équilatéral

- **Dans le demi-triangle** : la hauteur est le côté opposé à l'angle de 60° ✓
- **Relation** : hauteur = côté $\times \sin 60^\circ$ ✓
- **Équation** : $9 = c \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓
- **Résolution** : $c = \frac{18}{\sqrt{3}}$ ✓
- **Rationalisation** :

$$c = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3} \approx 10,392 \text{ cm}$$

- **Contrôle par Pythagore** : le demi-côté vaut $3\sqrt{3}$, et $81 + 27 = 108 = (6\sqrt{3})^2$ ✓
- **Aire** :

$$A = \frac{6\sqrt{3} \times 9}{2} = 27\sqrt{3} \approx 46,765 \text{ cm}^2$$

- **Contrôle par la formule** : $\frac{c^2\sqrt{3}}{4} = \frac{108\sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3}$ ✓
- **Cohérence** : les deux méthodes concordent ✓
- **Périmètre** : $18\sqrt{3} \approx 31,177$ cm ✓
- **Rapport hauteur sur côté** : $\frac{9}{10,392} \approx 0,866$ ✓
- **Contrôle** : c'est bien $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓
- **Rayon du cercle circonscrit** : les deux tiers de la hauteur, soit 6 cm ✓
- **Rayon du cercle inscrit** : le tiers de la hauteur, soit 3 cm ✓
- **Rapport** : 2 ✓
- **Contrôle du rayon circonscrit** : $\frac{c}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 6$ cm ✓
- **Contrôle de l'aire par le rayon inscrit** : $\frac{\text{périmètre} \times r}{2} = \frac{18\sqrt{3} \times 3}{2} = 27\sqrt{3}$ ✓

Réponse. Côté $6\sqrt{3} \approx 10,39$ cm et aire $27\sqrt{3} \approx 46,77$ cm².

Correction de l'exercice 8 - Comparer des tangentes

- **Sens de variation de la tangente** : elle **croît** sur $]0^\circ; 90^\circ[$ ✓
- **Donc** : $\tan 20^\circ < \tan 45^\circ < \tan 70^\circ$ ✓
- **Valeur repère** : $\tan 45^\circ = 1$ ✓
- **Conséquence** : $\tan 20^\circ < 1 < \tan 70^\circ$ ✓
- **Relation de complémentarité** : $\cos 20^\circ = \sin 70^\circ$ ✓
- **Donc** : ces deux quantités sont **égales** ✓

- **Encadrement de** $\cos 20^\circ$: il est entre 0 et 1 ✓
- **Comparaison à** $\tan 20^\circ$: $\tan 20^\circ = \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$, avec $\sin 20^\circ$ petit ✓
- **Conclusion** : $\tan 20^\circ < \cos 20^\circ$ ✓
- **Classement final** :

$$\tan 20^\circ < \cos 20^\circ = \sin 70^\circ < \tan 45^\circ < \tan 70^\circ$$
- **Vérification à la calculatrice** : $\tan 20^\circ \approx 0,3640$ ✓
- **Puis** : $\cos 20^\circ \approx 0,9397$ ✓
- **Puis** : $\sin 70^\circ \approx 0,9397$ ✓
- **Puis** : $\tan 45^\circ = 1$ ✓
- **Puis** : $\tan 70^\circ \approx 2,7475$ ✓
- **Cohérence** : le classement est confirmé ✓
- **Remarque** : $\tan 70^\circ = \frac{1}{\tan 20^\circ}$ ✓
- **Contrôle** : $\frac{1}{0,3640} \approx 2,7473$ ✓

Réponse. $\tan 20^\circ \approx 0,364 < \cos 20^\circ = \sin 70^\circ \approx 0,940 < \tan 45^\circ = 1 < \tan 70^\circ \approx 2,748$.

Correction de l'exercice 9 - Angles complémentaires

- **Relation entre les angles** : $\alpha + \beta = 90^\circ$ ✓
- **Justification** : la somme des angles d'un triangle vaut 180° , dont 90° pour l'angle droit ✓
- **Première conséquence** : $\cos \beta = \cos (90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ ✓
- **Donc** :

$$\cos \beta = 0,28$$
- **Calcul de** $\cos \alpha$: $\cos^2 \alpha = 1 - 0,0784 = 0,9216$ ✓
- **Résultat** : $\cos \alpha = 0,96$ ✓
- **Contrôle** : $0,96^2 = 0,9216$ ✓
- **Seconde conséquence** : $\sin \beta = \cos \alpha$ ✓
- **Donc** :

$$\sin \beta = 0,96$$
- **Tangente de** α : $\frac{0,28}{0,96}$ ✓
- **Résultat** : $\tan \alpha = \frac{7}{24} \approx 0,2917$ ✓
- **Triplet reconnaissable** : 7-24-25 ✓
- **Contrôle** : $\frac{7}{25} = 0,28$ ✓ et $\frac{24}{25} = 0,96$ ✓
- **Mesures des angles** : $\alpha \approx 16,26^\circ$ et $\beta \approx 73,74^\circ$ ✓
- **Contrôle** : $16,26 + 73,74 = 90^\circ$ ✓
- **Tangente de** β : $\frac{24}{7} \approx 3,4286$ ✓
- **Contrôle** : $\frac{7}{24} \times \frac{24}{7} = 1$ ✓

Réponse. $\cos \beta = 0,28$, $\sin \beta = \cos \alpha = 0,96$ et $\tan \alpha = \frac{7}{24} \approx 0,292$.

Correction de l'exercice 10 - Deux triangles accolés

- **Premier triangle** : rectangle en B , angle 60° en A , avec $AB = 6$ cm ✓
- **Côté BC** : il est opposé à l'angle de 60° ✓
- **Relation** : $\tan 60^\circ = \frac{BC}{AB}$ ✓
- **Calcul** :

$$BC = 6\sqrt{3} \approx 10,392 \text{ cm}$$

- **Hypoténuse AC** : $\frac{6}{\cos 60^\circ} = \frac{6}{0,5} = 12$ cm ✓
- **Contrôle par Pythagore** : $36 + 108 = 144 = 12^2$ ✓
- **Second triangle** : rectangle en C , angle 45° en A ✓
- **Nature** : rectangle isocèle ✓
- **Troisième sommet** : appelons-le D ✓
- **Côté CD** : $AC \times \tan 45^\circ = 12 \times 1 = 12$ cm ✓
- **Hypoténuse AD** : $\frac{12}{\cos 45^\circ} = \frac{12}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 12\sqrt{2} \approx 16,971$ cm ✓
- **Contrôle par Pythagore** : $144 + 144 = 288 = (12\sqrt{2})^2$ ✓
- **Longueur totale $BC + CD$** :

$$6\sqrt{3} + 12 \approx 22,392 \text{ cm}$$

- **Aire du premier triangle** : $\frac{6 \times 6\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3} \approx 31,177$ cm² ✓
- **Aire du second** : $\frac{12 \times 12}{2} = 72$ cm² ✓
- **Aire totale** : $\approx 103,18$ cm² ✓
- **Angle total en A** : $60 + 45 = 105^\circ$ ✓
- **Contrôle de cohérence** : $105^\circ < 180^\circ$, la figure est valide ✓

Réponse. $BC = 6\sqrt{3} \approx 10,39$ cm, $CD = 12$ cm, soit une longueur totale de $6\sqrt{3} + 12 \approx 22,39$ cm.

Correction de l'exercice 11 - Hauteur d'un arbre par deux visées

- **Notation** : h la hauteur de l'arbre, d la distance du second point au pied ✓
- **Depuis le second point** : $\tan 45^\circ = \frac{h}{d} = 1$, donc $d = h$ ✓
- **Depuis le premier point** : la distance au pied vaut $d + 20 = h + 20$ ✓
- **Relation** : $\tan 30^\circ = \frac{h}{h + 20}$ ✓
- **Substitution** : $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{h + 20}$ ✓
- **Produit en croix** : $\sqrt{3}(h + 20) = 3h$ ✓
- **Développement** : $\sqrt{3}h + 20\sqrt{3} = 3h$ ✓
- **Regroupement** : $20\sqrt{3} = h(3 - \sqrt{3})$ ✓
- **Résolution** :

$$h = \frac{20\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \approx \frac{34,641}{1,268} \approx 27,321 \text{ m}$$

- **Forme exacte simplifiée** : en multipliant par $3 + \sqrt{3}$, on obtient

$$h = \frac{20\sqrt{3}(3 + \sqrt{3})}{6} = 10\sqrt{3} + 10 \checkmark$$
- **Contrôle** : $10 \times 1,7321 + 10 = 27,321$ m $\checkmark$
- **Distance du second point** : $d = h \approx 27,321$ m $\checkmark$
- **Distance du premier point** : $\approx 47,321$ m $\checkmark$
- **Contrôle de la première visée** : $\frac{27,321}{47,321} \approx 0,5774 = \tan 30^\circ \checkmark$
- **Contrôle de la seconde** : $\frac{27,321}{27,321} = 1 = \tan 45^\circ \checkmark$
- **Contrôle de vraisemblance** : 27 m est une hauteur d'arbre plausible $\checkmark$
- **Remarque de méthode** : la double visée évite de mesurer la distance au pied, souvent inaccessible $\checkmark$

Réponse. $h = 10\sqrt{3} + 10 \approx 27,32$ m.

Correction de l'exercice 12 - Losange et trigonométrie

- **Propriété** : les diagonales d'un losange sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu $\checkmark$
- **Elles coupent aussi les angles en deux** $\checkmark$
- **Demi-angle** : $30^\circ \checkmark$
- **Triangle rectangle formé** : hypoténuse 10 cm, angles 30° et $60^\circ \checkmark$
- **Demi-diagonale opposée à 30°** : $10 \times \sin 30^\circ = 5$ cm $\checkmark$
- **Petite diagonale** :

$$10 \text{ cm}$$
- **Demi-diagonale opposée à 60°** : $10 \times \sin 60^\circ = 5\sqrt{3} \approx 8,660$ cm $\checkmark$
- **Grande diagonale** :

$$10\sqrt{3} \approx 17,321 \text{ cm}$$
- **Contrôle par Pythagore** : $25 + 75 = 100 = 10^2 \checkmark$
- **Remarque remarquable** : la petite diagonale vaut le **côté** $\checkmark$
- **Explication** : avec un angle de 60° , les deux triangles formés sont **équilatéraux** $\checkmark$
- **Aire par les diagonales** :

$$A = \frac{10 \times 10\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} \approx 86,603 \text{ cm}^2$$

- **Contrôle par la formule côté et sinus** : $10 \times 10 \times \sin 60^\circ = 100 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} \checkmark$
- **Cohérence** : les deux méthodes concordent $\checkmark$
- **Contrôle par deux triangles équilatéraux** : $2 \times \frac{100\sqrt{3}}{4} = 50\sqrt{3} \checkmark$
- **Périmètre** : 40 cm $\checkmark$
- **Comparaison avec le carré de même côté** : son aire ferait 100 cm² $\checkmark$
- **Rapport** : $\frac{86,603}{100} \approx 0,866 = \sin 60^\circ \checkmark$

Réponse. Diagonales 10 cm et $10\sqrt{3} \approx 17,32$ cm ; aire $50\sqrt{3} \approx 86,60$ cm².

Correction de l'exercice 13 - Pente en pourcentage

- **Signification d'une pente de 12 %** : 12 m de montée pour 100 m **horizontaux** $\checkmark$

— **Relation** : $\tan \alpha = 0,12$ ✓

— **Mesure de l'angle** :

$$\alpha \approx 6,84^\circ$$

— **Contrôle** : $\tan 6,84^\circ \approx 0,1199$ ✓

— **Attention** : les 3 km sont mesurés **le long de la route**, non horizontalement ✓

— **Relation adaptée** : dénivelé = $3000 \times \sin \alpha$ ✓

— **Calcul du sinus** : $\sin 6,84^\circ \approx 0,1191$ ✓

— **Dénivelé** :

$$\approx 3000 \times 0,1191 = 357,3 \text{ m}$$

— **Approximation courante** : $3000 \times 0,12 = 360 \text{ m}$ ✓

— **Écart** : 2,7 m, soit 0,75 % ✓

— **Conclusion** : pour les faibles pentes, l'approximation est excellente ✓

— **Distance horizontale parcourue** : $3000 \times \cos 6,84^\circ \approx 2978,6 \text{ m}$ ✓

— **Contrôle** : $\frac{357,3}{2978,6} \approx 0,1199$ ✓

— **Pour une pente de 100 %** : $\alpha = 45^\circ$ ✓

— **Dénivelé sur 3 km** : $3000 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 2121,3 \text{ m}$, et non 3000 m ✓

— **Leçon** : l'approximation s'effondre pour les fortes pentes ✓

— **Pente maximale des routes françaises** : environ 20 %, soit $11,3^\circ$ ✓

Réponse. $\alpha \approx 6,84^\circ$ et un dénivelé de $\approx 357,3 \text{ m}$ sur 3 km de route.

Correction de l'exercice 14 - Rationaliser et simplifier

— **Première expression** : $\frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}/3}$ ✓

— **Division de fractions** : $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{\sqrt{3}}$ ✓

— **Simplification** : les $\sqrt{3}$ se compensent ✓

— **Résultat** :

$$\frac{\sin 60^\circ}{\tan 30^\circ} = \frac{3}{2} = 1,5$$

— **Contrôle numérique** : $\frac{0,8660}{0,5774} \approx 1,4998$ ✓

— **Deuxième expression** : $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3}$ ✓

— **Calcul** : $\frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$ ✓

— **Résultat** :

$$\cos 30^\circ \times \tan 60^\circ = \frac{3}{2}$$

— **Coïncidence** : le même résultat que la première ✓

— **Explication** : $\tan 60^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ}$ et $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$ ✓

— **Contrôle numérique** : $0,8660 \times 1,7321 \approx 1,5000$ ✓

— **Troisième expression** : $\frac{1}{1} + \frac{1}{2}$ ✓

— **Résultat** :

$$\frac{1}{\tan 45^\circ} + \sin 30^\circ = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

- **Troisième coïncidence** : encore $\frac{3}{2}$ ✓
- **Bilan** : les trois expressions valent $\frac{3}{2}$ ✓
- **Un dernier calcul de contrôle** : $\cos^2 30^\circ + \sin^2 30^\circ = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$ ✓
- **Autre expression classique** : $\tan 30^\circ \times \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} = 1$ ✓

Réponse. Les trois valent $\frac{3}{2}$.

Correction de l'exercice 15 - Trapèze rectangle

- **Structure** : le trapèze se décompose en un rectangle et un triangle rectangle ✓
- **Base du triangle** : la différence des bases, soit $14 - 8 = 6$ cm ✓
- **Angle du triangle** : 60° ✓
- **Hauteur** : $\tan 60^\circ = \frac{h}{6}$ ✓
- **Calcul** :

$$h = 6\sqrt{3} \approx 10,392 \text{ cm}$$

- **Aire du trapèze** : $\frac{(14 + 8) \times h}{2}$ ✓
- **Calcul** :

$$A = \frac{22 \times 6\sqrt{3}}{2} = 66\sqrt{3} \approx 114,315 \text{ cm}^2$$

- **Contrôle par découpage** : rectangle $8 \times 6\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$ ✓
- **Triangle** : $\frac{6 \times 6\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$ ✓
- **Somme** : $48\sqrt{3} + 18\sqrt{3} = 66\sqrt{3}$ ✓
- **Cohérence** : les deux méthodes concordent ✓
- **Côté oblique** : $\frac{6}{\cos 60^\circ} = 12$ cm ✓
- **Contrôle par Pythagore** : $36 + 108 = 144 = 12^2$ ✓
- **Périmètre** : $14 + 8 + 6\sqrt{3} + 12 \approx 44,392$ cm ✓
- **Si l'angle valait 45°** : la hauteur serait 6 cm et l'aire 66 cm^2 ✓
- **Si l'angle valait 30°** : la hauteur serait $6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \approx 3,464$ cm ✓
- **Aire correspondante** : $22\sqrt{3} \approx 38,105 \text{ cm}^2$ ✓
- **Observation** : l'aire est **proportionnelle** à la tangente de l'angle ✓

Réponse. Hauteur $6\sqrt{3} \approx 10,39$ cm et aire $66\sqrt{3} \approx 114,32 \text{ cm}^2$.

Correction de l'exercice 16 - Distance inaccessible

- **Configuration** : le triangle ABC est rectangle en A ✓
- **Côté connu** : $AC = 50$ m, adjacent à l'angle en C ✓
- **Côté cherché** : AB , opposé à l'angle en C ✓
- **Relation** : $\tan 72^\circ = \frac{AB}{50}$ ✓
- **Valeur** : $\tan 72^\circ \approx 3,0777$ ✓
- **Largeur** :

$$AB \approx 50 \times 3,0777 \approx 153,88 \text{ m}$$

- **Contrôle de vraisemblance** : un fleuve de 154 m de large est plausible ✓
- **Hypoténuse** BC : $\frac{50}{\cos 72^\circ} \approx \frac{50}{0,3090} \approx 161,80 \text{ m}$ ✓
- **Contrôle par Pythagore** : $2500 + 23\,679 = 26\,179$, et $161,80^2 \approx 26\,179$ ✓
- **Troisième angle** : $90 - 72 = 18^\circ$ ✓
- **Contrôle** : $\tan 18^\circ = \frac{50}{153,88} \approx 0,3250$ ✓
- **Valeur attendue** : $\tan 18^\circ \approx 0,3249$ ✓
- **Sensibilité de la mesure** : si l'angle était mal mesuré à 73° , on trouverait $\approx 163,54 \text{ m}$ ✓
- **Écart** : environ 9,7 m pour 1° d'erreur ✓
- **Conclusion pratique** : il faut éviter les angles proches de 90° , où la tangente varie très vite ✓
- **Meilleure pratique** : choisir AC du même ordre que la largeur, pour un angle voisin de 45° ✓
- **Contrôle** : avec $AC = 150 \text{ m}$, l'angle serait de $\approx 45,7^\circ$ et une erreur de 1° ne coûterait que $\approx 5 \text{ m}$ ✓

Réponse. $AB = 50 \tan 72^\circ \approx 153,88 \text{ m}$.

Correction de l'exercice 17 - Synthèse : un toit à deux pentes

a) **Demi-base** : 6 m ✓

- **Hauteur du faîtage** : $\tan 35^\circ = \frac{h}{6}$ ✓
- **Valeur** : $\tan 35^\circ \approx 0,7002$ ✓
- **Calcul** :

$$h \approx 6 \times 0,7002 \approx 4,201 \text{ m}$$

- **Longueur d'un versant** : $\frac{6}{\cos 35^\circ}$ ✓
- **Valeur** : $\cos 35^\circ \approx 0,8192$ ✓
- **Calcul** :

$$l \approx \frac{6}{0,8192} \approx 7,325 \text{ m}$$

- **Contrôle par Pythagore** : $36 + 17,65 = 53,65$, et $7,325^2 \approx 53,65$ ✓

b) **Surface d'un versant** : $7,325 \times 18 \approx 131,85 \text{ m}^2$ ✓

— **Surface totale** :

$$2 \times 131,85 \approx 263,70 \text{ m}^2$$

- **Comparaison avec la surface au sol** : $12 \times 18 = 216 \text{ m}^2$ ✓
- **Rapport** : $\frac{263,70}{216} \approx 1,2209$ ✓
- **Contrôle** : ce rapport vaut $\frac{1}{\cos 35^\circ} \approx 1,2208$ ✓
- **Nombre de tuiles à 14 tuiles/m²** : environ 3692 tuiles ✓

c) **Aire de la section triangulaire** : $\frac{12 \times 4,201}{2} \approx 25,21 \text{ m}^2$ ✓

— **Volume du prisme** :

$$V \approx 25,21 \times 18 \approx 453,74 \text{ m}^3$$

- **Contrôle de vraisemblance** : des combles de 450 m^3 sur 216 m^2 de sol, c'est plausible ✓
- **Hauteur moyenne** : $\frac{453,74}{216} \approx 2,101 \text{ m}$ ✓
- **Cohérence** : c'est la moitié de la hauteur du faîtage ✓
- **Surface utilisable sous 1,80 m** : il faut $\tan 35^\circ \times x \geq 1,80$, donc $x \geq 2,571 \text{ m}$ depuis le bord ✓
- **Largeur utile** : $12 - 2 \times 2,571 \approx 6,858 \text{ m}$ ✓
- **Surface utile** : $6,858 \times 18 \approx 123,44 \text{ m}^2$, soit 57,1 % du sol ✓
- d) **Objectif** : $h = 5 \text{ m}$ avec une demi-base de 6 m ✓

— **Relation** : $\tan \alpha = \frac{5}{6}$ ✓

— **Valeur** : $\frac{5}{6} \approx 0,8333$ ✓

— **Angle** :

$$\alpha \approx 39,81^\circ$$

- **Contrôle** : $\tan 39,81^\circ \approx 0,8333$ ✓
- **Nouvelle longueur de versant** : $\sqrt{36 + 25} = \sqrt{61} \approx 7,810 \text{ m}$ ✓
- **Nouvelle surface de toiture** : $2 \times 7,810 \times 18 \approx 281,17 \text{ m}^2$ ✓
- **Augmentation** : $\frac{281,17 - 263,70}{263,70} \approx 6,6 \%$ ✓
- **Nouveau volume des combles** : $\frac{12 \times 5}{2} \times 18 = 540 \text{ m}^3$ ✓
- **Augmentation du volume** : $\frac{540 - 453,74}{453,74} \approx 19,0 \%$ ✓
- **Bilan de l'arbitrage** : 6,6 % de tuiles en plus pour 19 % de volume habitable gagné ✓
- **Conclusion** : redresser la pente est une opération **rentable** en volume ✓

Réponse. a) $h \approx 4,20 \text{ m}$ et versant $\approx 7,33 \text{ m}$ · b) $\approx 263,70 \text{ m}^2$ · c) $\approx 453,74 \text{ m}^3$ · d) $\alpha = \arctan \frac{5}{6} \approx 39,81^\circ$.