

Plaquette 1 - Cosinus, sinus, tangente : longueurs et angles

Trigonométrie (triangle rectangle) — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules et méthodes de trigonométrie.

- Dans un triangle rectangle, pour un angle aigu $\hat{B}$:

$$\cos \hat{B} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \quad \sin \hat{B} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \quad \tan \hat{B} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

- Moyen mnémotechnique : **CAH - SOH - TOA**.
- L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit : c'est toujours le plus long.
- Pour trouver un **angle**, on utilise les fonctions inverses : si $\cos \hat{B} = 0,6$ alors $\hat{B} = \arccos(0,6)$ (calculatrice en degrés).
- Pour trouver une **longueur**, on écrit le rapport puis on résout : $\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}$ donne $AB = BC \times \cos \hat{B}$ ou $BC = \frac{AB}{\cos \hat{B}}$.
- Relations utiles : $\cos^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{B} = 1$ et $\tan \hat{B} = \frac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{B}}$.
- Un cosinus et un sinus d'angle aigu sont toujours compris entre 0 et 1.
- Théorème de Pythagore : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ dans un triangle rectangle en A.

Correction de l'exercice 1 - Nommer les côtés

- L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit : c'est $[BC]$.
- Le côté **adjacent** à $\hat{B}$ est celui qui forme l'angle avec l'hypoténuse : $[AB]$.
- Le côté **opposé** à $\hat{B}$ est celui qui ne touche pas B : $[AC]$.
- D'où les trois rapports :

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} \quad \sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} \quad \tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}$$

- Pour l'autre angle aigu, $\hat{C}$, les rôles de $[AB]$ et $[AC]$ s'échangent.

Réponse. Hypoténuse $[BC]$, adjacent $[AB]$, opposé $[AC]$.

Correction de l'exercice 2 - Calculer un angle avec le cosinus

On connaît le côté adjacent à $\hat{B}$ et l'hypoténuse : c'est le **cosinus** qu'il faut utiliser.

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{7} \approx 0,571$$

- On utilise la fonction inverse : $\hat{B} = \arccos\left(\frac{4}{7}\right) \approx 55,1^\circ$.
- Contrôle de vraisemblance : $\frac{4}{7}$ est un peu supérieur à 0,5, et $\cos 60^\circ = 0,5$: l'angle doit être un peu inférieur à 60° . C'est cohérent.

Réponse. $\hat{B} \approx 55,1^\circ$.

Correction de l'exercice 3 - Calculer deux longueurs

— Pour AB (adjacent) et BC (hypoténuse), on utilise le cosinus :

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = BC \times \cos \hat{B} = 10 \times \cos 35^\circ \approx 10 \times 0,819 \approx 8,2 \text{ cm}$$

— Pour AC (opposé) et BC (hypoténuse), on utilise le sinus :

$$AC = BC \times \sin \hat{B} = 10 \times \sin 35^\circ \approx 10 \times 0,574 \approx 5,7 \text{ cm}$$

— Contrôle avec Pythagore : $8,19^2 + 5,74^2 \approx 67,1 + 32,9 = 100 = 10^2$. Cohérent.

Réponse. $AB \approx 8,2 \text{ cm}$ et $AC \approx 5,7 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 4 - Utiliser la tangente

Ici on connaît le côté **adjacent** à $\hat{B}$ et on cherche le côté **opposé** : c'est la tangente.

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC = AB \times \tan \hat{B}$$

— $AC = 6 \times \tan 40^\circ \approx 6 \times 0,839 \approx 5,0 \text{ cm}$.

— Plus précisément $AC \approx 5,035 \text{ cm}$, soit 5,0 cm au millimètre.

Méthode. Quand l'hypoténuse n'intervient pas (ni connue, ni cherchée), c'est la tangente qu'il faut choisir.

Réponse. $AC \approx 5,0 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 5 - Trouver l'hypoténuse

On connaît l'adjacent et on cherche l'hypoténuse : cosinus.

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow BC = \frac{AB}{\cos \hat{B}}$$

— $BC = \frac{5}{\cos 62^\circ} \approx \frac{5}{0,4695} \approx 10,65 \text{ cm}$, soit 10,7 cm au millimètre.

— Vraisemblance : l'hypoténuse doit être **plus grande** que $AB = 5 \text{ cm}$. C'est bien le cas.

Piège. L'inconnue est au dénominateur : on divise, on ne multiplie pas.

Réponse. $BC \approx 10,7 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 6 - Calculer un angle avec le sinus

$[AC]$ est le côté opposé à $\hat{B}$, $[BC]$ l'hypoténuse : on utilise le sinus.

$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{8} = 0,375$$

— Donc $\hat{B} = \arcsin(0,375) \approx 22,0^\circ$.

— Contrôle : $\sin 30^\circ = 0,5 > 0,375$, donc l'angle est inférieur à 30° . Cohérent.

Réponse. $\hat{B} \approx 22,0^\circ$.

Correction de l'exercice 7 - Pythagore puis trigonométrie

a) Théorème de Pythagore dans le triangle rectangle en A :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$$

— Donc $BC = \sqrt{225} = 15 \text{ cm}$ (valeur exacte).

b) On connaît maintenant les trois côtés ; avec l'adjacent et l'hypoténuse :

- $\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{9}{15} = 0,6$.
- $\hat{B} = \arccos(0,6) \approx 53,1^\circ$.
- On aurait pu utiliser la tangente : $\tan \hat{B} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ et $\arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53,1^\circ$. Même résultat.

Réponse. a) $BC = 15 \text{ cm}$ · b) $\hat{B} \approx 53,1^\circ$.

Correction de l'exercice 8 - Relations entre cosinus, sinus et tangente

a) On utilise la relation du cours $\cos^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{B} = 1$:

- $\sin^2 \hat{B} = 1 - 0,6^2 = 1 - 0,36 = 0,64$.
- L'angle étant aigu, son sinus est **positif** : $\sin \hat{B} = \sqrt{0,64} = 0,8$.

b) Seconde relation du cours :

$$\tan \hat{B} = \frac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{B}} = \frac{0,8}{0,6} = \frac{4}{3} \approx 1,33$$

- On reconnaît le triangle de côtés 3, 4, 5 : c'est le même angle que dans l'exercice précédent, $\approx 53,1^\circ$.

Réponse. a) $\sin \hat{B} = 0,8$ · b) $\tan \hat{B} = \frac{4}{3}$.

Correction de l'exercice 9 - Problème : une échelle contre un mur

On modélise par un triangle rectangle : l'échelle est l'hypoténuse (6 m), l'angle au sol vaut 72° .

a) La hauteur est le côté **opposé** à l'angle de 72° :

$$h = 6 \times \sin 72^\circ \approx 6 \times 0,951 \approx 5,71 \text{ m}$$

b) La distance au mur est le côté **adjacent** :

$$d = 6 \times \cos 72^\circ \approx 6 \times 0,309 \approx 1,85 \text{ m}$$

- Contrôle par Pythagore : $5,71^2 + 1,85^2 \approx 32,6 + 3,4 = 36 = 6^2$. Cohérent.
- Interprétation : plus l'angle est grand, plus l'échelle est verticale (hauteur élevée, pied proche du mur).

Réponse. a) $h \approx 5,71 \text{ m}$ · b) $d \approx 1,85 \text{ m}$.

Correction de l'exercice 10 - Problème : pente d'une rampe d'accès

a) La hauteur est le côté opposé, la rampe est l'hypoténuse : on utilise le sinus.

- $\sin \alpha = \frac{0,60}{8} = 0,075$.
- $\alpha = \arcsin(0,075) \approx 4,3^\circ$.

b) On calcule le rapport imposé par la réglementation :

$$\frac{0,60}{7,98} \approx 0,0752 = 7,52 \%$$

- $7,52 \% > 5 \%$: la rampe **n'est pas conforme**.
- Pour respecter les 5 %, il faudrait une longueur horizontale d'au moins $\frac{0,60}{0,05} = 12 \text{ m}$.

Réponse. a) $\alpha \approx 4,3^\circ$ · b) non : pente $\approx 7,5 \% > 5 \%$ (il faudrait 12 m).

Correction de l'exercice 11 - Synthèse : quatre calculs

Dans le triangle rectangle en M : l'hypoténuse est $[NP]$, le côté adjacent à $\hat{N}$ est $[MN]$, le côté opposé est $[MP]$.

- a) Adjacent connu, opposé cherché : tangente. $MP = MN \times \tan 25^\circ \approx 7 \times 0,466 \approx 3,3 \text{ cm}$.
- b) Adjacent et hypoténuse : cosinus. $\cos \hat{N} = \frac{5}{13} \approx 0,385$, donc $\hat{N} = \arccos\left(\frac{5}{13}\right) \approx 67,4^\circ$.
- c) Hypoténuse connue, opposé cherché : sinus. $MP = NP \times \sin 25^\circ \approx 12 \times 0,423 \approx 5,1 \text{ cm}$.
- d) La somme des angles d'un triangle vaut 180° . Comme $\hat{M} = 90^\circ$, il reste $\hat{N} + \hat{P} = 180 - 90 = 90^\circ$: les deux angles aigus sont **complémentaires**.

Réponse. a) $MP \approx 3,3 \text{ cm}$ · b) $\hat{N} \approx 67,4^\circ$ · c) $MP \approx 5,1 \text{ cm}$ · d) $\hat{N} + \hat{P} = 90^\circ$.