Plaquette 1 – Cosinus, sinus, tangente : longueurs et angles

Trigonométrie (triangle rectangle) — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules et méthodes de trigonométrie.

— Dans un triangle rectangle, pour un angle aigu $\hat{B}$:

$$\cos\hat{B} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \qquad \sin\hat{B} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \qquad \tan\hat{B} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

— Moyen mnémotechnique : **CAH – SOH – TOA**.

— L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit : c'est toujours le plus long.

— Pour trouver un **angle**, on utilise les fonctions inverses : si $\cos\hat{B} = 0{,}6$ alors $\hat{B} = \arccos(0{,}6)$ (calculatrice en degrés).

— Pour trouver une **longueur**, on écrit le rapport puis on résout : $\cos\hat{B} = \dfrac{AB}{BC}$ donne $AB = BC \times \cos\hat{B}$ ou $BC = \dfrac{AB}{\cos\hat{B}}$.

— Relations utiles : $\cos^2\hat{B} + \sin^2\hat{B} = 1$ et $\tan\hat{B} = \dfrac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}}$.

— Un cosinus et un sinus d'angle aigu sont toujours compris entre 0 et 1.

— Théorème de Pythagore : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ dans un triangle rectangle en A.

Correction de l'exercice 1 – Nommer les côtés

— L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit : c'est $[BC]$.

— Le côté **adjacent** à $\hat{B}$ est celui qui forme l'angle avec l'hypoténuse : $[AB]$.

— Le côté **opposé** à $\hat{B}$ est celui qui ne touche pas B : $[AC]$.

— D'où les trois rapports :

$$\cos\hat{B} = \frac{AB}{BC} \qquad \sin\hat{B} = \frac{AC}{BC} \qquad \tan\hat{B} = \frac{AC}{AB}$$

— Pour l'autre angle aigu, $\hat{C}$, les rôles de $[AB]$ et $[AC]$ s'échangent.

Réponse. Hypoténuse $[BC]$, adjacent $[AB]$, opposé $[AC]$.

Correction de l'exercice 2 – Calculer un angle avec le cosinus

On connaît le côté adjacent à $\hat{B}$ et l'hypoténuse : c'est le **cosinus** qu'il faut utiliser.

$$\cos\hat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{7} \approx 0{,}571$$

— On utilise la fonction inverse : $\hat{B} = \arccos\left(\dfrac{4}{7}\right) \approx 55{,}1°$.

— Contrôle de vraisemblance : $\dfrac{4}{7}$ est un peu supérieur à 0,5, et $\cos 60° = 0{,}5$: l'angle doit être un peu inférieur à 60°. C'est cohérent.

Réponse. $\hat{B} \approx 55{,}1°$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Calculer deux longueurs

— Pour AB (adjacent) et BC (hypoténuse), on utilise le cosinus :

$$\cos\hat{B} = \frac{AB}{BC} \Longrightarrow AB = BC \times \cos\hat{B} = 10 \times \cos 35° \approx 10 \times 0{,}819 \approx 8{,}2 \text{ cm}$$

— Pour AC (opposé) et BC (hypoténuse), on utilise le sinus :

$$AC = BC \times \sin\hat{B} = 10 \times \sin 35° \approx 10 \times 0{,}574 \approx 5{,}7 \text{ cm}$$

— Contrôle avec Pythagore : $8{,}19^2 + 5{,}74^2 \approx 67{,}1 + 32{,}9 = 100 = 10^2$. Cohérent.

Réponse. $AB \approx 8{,}2$ cm et $AC \approx 5{,}7$ cm.

Correction de l'exercice 4 – Utiliser la tangente

Ici on connaît le côté **adjacent** à $\hat{B}$ et on cherche le côté **opposé** : c'est la tangente.

$$\tan\hat{B} = \frac{AC}{AB} \Longrightarrow AC = AB \times \tan\hat{B}$$

— $AC = 6 \times \tan 40° \approx 6 \times 0{,}839 \approx 5{,}0$ cm.

— Plus précisément $AC \approx 5{,}035$ cm, soit 5,0 cm au millimètre.

Méthode. Quand l'hypoténuse n'intervient pas (ni connue, ni cherchée), c'est la tangente qu'il faut choisir.

Réponse. $AC \approx 5{,}0$ cm.

Correction de l'exercice 5 – Trouver l'hypoténuse

On connaît l'adjacent et on cherche l'hypoténuse : cosinus.

$$\cos\hat{B} = \frac{AB}{BC} \Longrightarrow BC = \frac{AB}{\cos\hat{B}}$$

— $BC = \dfrac{5}{\cos 62°} \approx \dfrac{5}{0{,}469\,5} \approx 10{,}65$ cm, soit 10,7 cm au millimètre.

— Vraisemblance : l'hypoténuse doit être **plus grande** que $AB = 5$ cm. C'est bien le cas.

Piège. L'inconnue est au dénominateur : on divise, on ne multiplie pas.

Réponse. $BC \approx 10{,}7$ cm.

Correction de l'exercice 6 – Calculer un angle avec le sinus

$[AC]$ est le côté opposé à $\hat{B}$, $[BC]$ l'hypoténuse : on utilise le sinus.

$$\sin\hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

— Donc $\hat{B} = \arcsin(0{,}375) \approx 22{,}0°$.

— Contrôle : $\sin 30° = 0{,}5 > 0{,}375$, donc l'angle est inférieur à 30°. Cohérent.

Réponse. $\hat{B} \approx 22{,}0°$.

Correction de l'exercice 7 – Pythagore puis trigonométrie

a) Théorème de Pythagore dans le triangle rectangle en A :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$$

— Donc $BC = \sqrt{225} = 15$ cm (valeur exacte).

b) On connaît maintenant les trois côtés ; avec l'adjacent et l'hypoténuse :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $\cos\hat{B} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{9}{15} = 0{,}6$.

— $\hat{B} = \arccos(0{,}6) \approx 53{,}1°$.

— On aurait pu utiliser la tangente : $\tan\hat{B} = \dfrac{12}{9} = \dfrac{4}{3}$ et $\arctan\left(\dfrac{4}{3}\right) \approx 53{,}1°$. Même résultat.

Réponse. a) $BC = 15$ cm · b) $\hat{B} \approx 53{,}1°$.

Correction de l’exercice 8 – Relations entre cosinus, sinus et tangente

a) On utilise la relation du cours $\cos^2\hat{B} + \sin^2\hat{B} = 1$:

— $\sin^2\hat{B} = 1 - 0{,}6^2 = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$.

— L’angle étant aigu, son sinus est **positif** : $\sin\hat{B} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$.

b) Seconde relation du cours :

$$\tan\hat{B} = \frac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}} = \frac{0{,}8}{0{,}6} = \frac{4}{3} \approx 1{,}33$$

— On reconnaît le triangle de côtés 3, 4, 5 : c’est le même angle que dans l’exercice précédent, $\approx 53{,}1°$.

Réponse. a) $\sin\hat{B} = 0{,}8$ · b) $\tan\hat{B} = \dfrac{4}{3}$.

Correction de l’exercice 9 – Problème : une échelle contre un mur

On modélise par un triangle rectangle : l’échelle est l’hypoténuse (6 m), l’angle au sol vaut 72°.

a) La hauteur est le côté **opposé** à l’angle de 72° :

$$h = 6 \times \sin 72° \approx 6 \times 0{,}951 \approx 5{,}71 \text{ m}$$

b) La distance au mur est le côté **adjacent** :

$$d = 6 \times \cos 72° \approx 6 \times 0{,}309 \approx 1{,}85 \text{ m}$$

— Contrôle par Pythagore : $5{,}71^2 + 1{,}85^2 \approx 32{,}6 + 3{,}4 = 36 = 6^2$. Cohérent.

— Interprétation : plus l’angle est grand, plus l’échelle est verticale (hauteur élevée, pied proche du mur).

Réponse. a) $h \approx 5{,}71$ m · b) $d \approx 1{,}85$ m.

Correction de l’exercice 10 – Problème : pente d’une rampe d’accès

a) La hauteur est le côté opposé, la rampe est l’hypoténuse : on utilise le sinus.

— $\sin\alpha = \dfrac{0{,}60}{8} = 0{,}075$.

— $\alpha = \arcsin(0{,}075) \approx 4{,}3°$.

b) On calcule le rapport imposé par la réglementation :

$$\frac{0{,}60}{7{,}98} \approx 0{,}075\,2 = 7{,}52\,\%$$

— $7{,}52\,\% > 5\,\%$: la rampe **n’est pas conforme**.

— Pour respecter les 5 %, il faudrait une longueur horizontale d’au moins $\dfrac{0{,}60}{0{,}05} = 12$ m.

Réponse. a) $\alpha \approx 4{,}3°$ · b) non : pente $\approx 7{,}5\,\% > 5\,\%$ (il faudrait 12 m).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 11 – Choisir le bon rapport

Pour l'angle $\hat{D}$, l'hypoténuse est $[DF]$ (opposée à l'angle droit), le côté adjacent est $[DE]$ et le côté opposé est $[EF]$.

— On connaît l'adjacent et on cherche l'opposé : c'est la **tangente**.

$$EF = DE \times \tan 28° \approx 7 \times 0{,}532 \approx 3{,}7 \text{ cm}$$

— On connaît l'adjacent et on cherche l'hypoténuse : c'est le **cosinus**, avec l'inconnue au dénominateur, $DF = \dfrac{DE}{\cos 28°} \approx \dfrac{7}{0{,}883} \approx 7{,}9$ cm.

Contrôle par Pythagore : $7^2 + 3{,}72^2 \approx 49 + 13{,}8 = 62{,}8$ et $7{,}93^2 \approx 62{,}8$. L'hypoténuse est bien le plus long côté.

Réponse. $EF \approx 3{,}7$ cm et $DF \approx 7{,}9$ cm.

Correction de l'exercice 12 – Problème : la hauteur d'un cerf-volant

On considère le triangle rectangle formé par le fil (l'hypoténuse, 30 m), l'horizontale passant par la main et la verticale passant par le cerf-volant. La hauteur du cerf-volant **au-dessus de la main** est le côté opposé à l'angle de 50° :

$$QK = 30 \times \sin 50° \approx 30 \times 0{,}766 \approx 22{,}98 \text{ m}$$

La main est à 1 m du sol : le cerf-volant vole à environ $22{,}98 + 1 \approx 24{,}0$ m.

Piège. Oublier la hauteur de la main donnerait 23,0 m. **Contrôle** : la hauteur est inférieure à la longueur du fil, ce qui est obligatoire puisque le fil est l'hypoténuse.

Réponse. Environ 24,0 m au-dessus du sol.

Correction de l'exercice 13 – Problème : l'angle d'un toit

Le toit étant symétrique, le faîtage est au-dessus du milieu de la maison : chaque versant forme un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent $\dfrac{8}{2} = 4$ m (horizontalement) et 3 m (verticalement).

— On connaît l'opposé et l'adjacent : c'est la tangente.

$$\tan \alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75 \quad \text{donc} \quad \alpha \approx 36{,}9°$$

— Le versant est l'hypoténuse : par Pythagore, $\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ m.

Contrôle avec le cosinus : $\dfrac{4}{5} = 0{,}8$, et la calculatrice redonne $\arccos(0{,}8) \approx 36{,}9°$. On reconnaît le triangle 3, 4, 5.

Réponse. $\alpha \approx 36{,}9°$ et un versant de 5 m.

Correction de l'exercice 14 – Rectangle ou non ? Puis les angles

a) Le plus long côté est $[ST]$. On compare son carré à la somme des carrés des deux autres côtés :

$$ST^2 = 13^2 = 169 \qquad RS^2 + RT^2 = 25 + 144 = 169$$

Les deux résultats sont égaux : d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle en R, le sommet opposé au plus long côté.

b) Pour l'angle $\hat{S}$, le côté adjacent est $[RS]$ et le côté opposé $[RT]$: $\tan \hat{S} = \dfrac{12}{5} = 2{,}4$, d'où $\hat{S} \approx 67{,}4°$. Les deux angles aigus sont complémentaires, donc $\hat{T} \approx 90 - 67{,}4 = 22{,}6°$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle : $\sin\hat{T} = \dfrac{RS}{ST} = \dfrac{5}{13} \approx 0{,}385$, et la calculatrice redonne $\arcsin\left(\dfrac{5}{13}\right) \approx 22{,}6°$.

Réponse. a) Rectangle en R ($169 = 25 + 144$) · b) $\hat{S} \approx 67{,}4°$ et $\hat{T} \approx 22{,}6°$.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : quatre calculs

Dans le triangle rectangle en M : l’hypoténuse est $[NP]$, le côté adjacent à $\hat{N}$ est $[MN]$, le côté opposé est $[MP]$.

a) Adjacent connu, opposé cherché : tangente. $MP = MN \times \tan 25° \approx 7 \times 0{,}466 \approx 3{,}3$ cm.

b) Adjacent et hypoténuse : cosinus. $\cos\hat{N} = \dfrac{5}{13} \approx 0{,}385$, donc $\hat{N} = \arccos\left(\dfrac{5}{13}\right) \approx 67{,}4°$.

c) Hypoténuse connue, opposé cherché : sinus. $MP = NP \times \sin 25° \approx 12 \times 0{,}423 \approx 5{,}1$ cm.

d) La somme des angles d’un triangle vaut 180°. Comme $\hat{M} = 90°$, il reste $\hat{N} + \hat{P} = 180 - 90 = 90°$: les deux angles aigus sont **complémentaires**.

Réponse. a) $MP \approx 3{,}3$ cm · b) $\hat{N} \approx 67{,}4°$ · c) $MP \approx 5{,}1$ cm · d) $\hat{N} + \hat{P} = 90°$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).