

Plaquette 3 - Problèmes de mesure : hauteurs, pentes et distances

Trigonométrie (triangle rectangle) — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Choisir le bon rapport. On regarde ce qu'on connaît et ce qu'on cherche.

On connaît	On cherche	Rapport
hypoténuse et angle	côté adjacent	cos
hypoténuse et angle	côté opposé	sin
côté adjacent et angle	côté opposé	tan
deux côtés de l'angle droit	angle	tan
un côté et l'hypoténuse	angle	cos ou sin

Moyen mnémotechnique. « CAH-SOH-TOA » : **Cos** = **A**djacent sur **H**ypoténuse, **Sin** = **O**pposé sur **H**ypoténuse, **Tan** = **O**pposé sur **A**djacent.

Vocabulaire des situations concrètes.

Terme	Signification géométrique
angle d'élévation	angle entre l'horizontale et la visée vers le haut
angle de dépression	angle entre l'horizontale et la visée vers le bas
pente en %	$100 \times \tan \alpha$
dénivelé	côté vertical
distance parcourue	souvent l'hypoténuse, pas l'horizontale

Trois pièges récurrents.

- Confondre la distance **le long de la pente** (hypoténuse) et la distance **horizontale** (côté adjacent).
- Oublier la **hauteur de l'observateur** ou de l'instrument.
- Utiliser la calculatrice en radians au lieu de degrés — un cosinus de 0,99 pour un angle de 30° doit alerter.

Contrôle par les ordres de grandeur. Pour un angle inférieur à 45° , le côté opposé est **plus petit** que le côté adjacent ; au-delà de 45° , c'est l'inverse.

Correction de l'exercice 1 - Hauteur d'un immeuble

- **Schéma** : triangle rectangle, angle droit au pied de la verticale à hauteur d'œil ✓
- **Côté adjacent** : 40 m ✓
- **Côté opposé** : la hauteur **au-dessus de l'œil** ✓
- **Relation** : $\tan 58^\circ = \frac{\text{opposé}}{40}$ ✓
- **Valeur** : $\tan 58^\circ \approx 1,6003$ ✓
- **Calcul** : $\text{opposé} \approx 40 \times 1,6003 \approx 64,01$ m ✓
- **Hauteur totale** : on **ajoute** la hauteur d'œil ✓
- **Résultat** :

$$h \approx 64,01 + 1,70 = 65,71 \text{ m}$$

- **Contrôle de vraisemblance** : un immeuble de 66 m fait une vingtaine d'étages ✓
- **Erreur classique** : oublier les 1,70 m ✓
- **Poids de cette erreur** : 2,6 % ✓
- **Contrôle de l'angle** : $58^\circ > 45^\circ$, donc l'opposé dépasse l'adjacent ✓
- **Vérification** : $64,01 > 40$ ✓
- **Distance de visée** : $\frac{40}{\cos 58^\circ} \approx \frac{40}{0,5299} \approx 75,48 \text{ m}$ ✓
- **Contrôle par Pythagore** : $1600 + 4097 = 5697$, et $75,48^2 \approx 5697$ ✓
- **Si l'on s'éloignait à 60 m** : l'angle deviendrait $\arctan \frac{64,01}{60} \approx 46,85^\circ$ ✓
- **Contrôle** : $60 \times \tan 46,85^\circ \approx 64,0 \text{ m}$ ✓

Réponse. $h \approx 40 \tan 58^\circ + 1,70 \approx 65,71 \text{ m}$.

Correction de l'exercice 2 - Angle de dépression

- **Schéma** : triangle rectangle, angle droit au pied de la falaise ✓
- **Côté vertical** : 80 m ✓
- **Angle de dépression** : mesuré depuis l'horizontale, vers le bas ✓
- **Angle dans le triangle, au sommet** : $90 - 23 = 67^\circ$ ✓
- **Première méthode — depuis le sommet** : $\tan 67^\circ = \frac{\text{distance}}{80}$ ✓
- **Valeur** : $\tan 67^\circ \approx 2,3559$ ✓
- **Distance** : $\approx 80 \times 2,3559 \approx 188,47 \text{ m}$ ✓
- **Seconde méthode — depuis le bateau** : l'angle d'élévation vaut aussi 23° ✓
- **Relation** : $\tan 23^\circ = \frac{80}{\text{distance}}$ ✓
- **Valeur** : $\tan 23^\circ \approx 0,4245$ ✓
- **Distance** :

$$\frac{80}{0,4245} \approx 188,47 \text{ m}$$

- **Cohérence** : les deux méthodes concordent aux arrondis près ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : un angle faible correspond à un bateau **éloigné** ✓
- **Contrôle** : $188 > 80$, conforme à $23^\circ < 45^\circ$ ✓
- **Distance de visée** : $\frac{80}{\sin 23^\circ} \approx \frac{80}{0,3907} \approx 204,74 \text{ m}$ ✓
- **Contrôle par Pythagore** : $6400 + 35\,521 = 41\,921$, et $204,74^2 \approx 41\,919$ ✓
- **Si le bateau approchait à 100 m** : l'angle deviendrait $\arctan \frac{80}{100} \approx 38,66^\circ$ ✓

Réponse. $\frac{80}{\tan 23^\circ} \approx 188,47 \text{ m}$.

Correction de l'exercice 3 - Longueur d'un câble

- **Schéma** : triangle rectangle au pied du pylône ✓
- **Côtés de l'angle droit** : 18 m (vertical) et 7 m (horizontal) ✓
- **Longueur du câble** : c'est l'hypoténuse ✓
- **Pythagore** :

$$c = \sqrt{324 + 49} = \sqrt{373} \approx 19,313 \text{ m}$$

— **Angle avec le sol** : $\tan \alpha = \frac{18}{7}$ ✓

— **Valeur** : $\frac{18}{7} \approx 2,5714$ ✓

— **Mesure** :

$$\alpha \approx 68,75^\circ$$

— **Contrôle** : $\tan 68,75^\circ \approx 2,5715$ ✓

— **Contrôle par le cosinus** : $\cos \alpha = \frac{7}{19,313} \approx 0,3625$ ✓

— **Vérification** : $\arccos(0,3625) \approx 68,75^\circ$ ✓

— **Contrôle par le sinus** : $\sin \alpha = \frac{18}{19,313} \approx 0,9320$ ✓

— **Contrôle de Pythagore trigonométrique** :

$$0,3625^2 + 0,9320^2 \approx 0,1314 + 0,8686 = 1,0000$$
 ✓

— **Angle au sommet du pylône** : $90 - 68,75 = 21,25^\circ$ ✓

— **Contrôle de vraisemblance** : le câble est très redressé, ce qui est normal avec un pylône haut et un ancrage proche ✓

— **Longueur pour un ancrage à 12 m** : $\sqrt{324 + 144} = \sqrt{468} \approx 21,633$ m ✓

— **Nouvel angle** : $\arctan \frac{18}{12} \approx 56,31^\circ$ ✓

— **Remarque technique** : un angle de 45° à 60° est le compromis usuel entre tenue et emprise au sol ✓

Réponse. Câble $\sqrt{373} \approx 19,31$ m, faisant un angle de $\approx 68,75^\circ$ avec le sol.

Correction de l'exercice 4 - Rampe pour personnes à mobilité réduite

— **Signification de 5 %** : 5 cm de montée pour 100 cm horizontaux ✓

— **Relation** : $\tan \alpha = 0,05$ ✓

— **Angle** : $\alpha \approx 2,86^\circ$ ✓

— **Contrôle** : $\tan 2,86^\circ \approx 0,0500$ ✓

— **Longueur horizontale nécessaire** : $\frac{18}{0,05} = 360$ cm ✓

— **Longueur de la rampe** : c'est l'hypoténuse ✓

— **Pythagore** :

$$\sqrt{360^2 + 18^2} = \sqrt{129\,600 + 324} = \sqrt{129\,924} \approx 360,45 \text{ cm}$$

— **Arrondi pratique** : 3,61 m ✓

— **Contrôle par le sinus** : $\frac{18}{\sin 2,86^\circ} \approx \frac{18}{0,0499} \approx 360,75$ cm ✓

— **Cohérence** : les deux valeurs concordent aux arrondis près ✓

— **Observation** : pour une pente faible, l'hypoténuse et l'horizontale sont presque égales ✓

— **Écart relatif** : $\frac{360,45 - 360}{360} \approx 0,125\%$ ✓

— **Contrainte pratique** : il faut 3,60 m de dégagement devant la marche ✓

— **Si la pente était de 8 %** (tolérée sur 2 m) : $\frac{18}{0,08} = 225$ cm ✓

— **Angle correspondant** : $\approx 4,57^\circ$ ✓

— **Si la pente était de 12 %** (tolérée sur 0,50 m) : 150 cm ✓

— **Conclusion réglementaire** : les 5 % s'appliquent aux longues rampes, des pentes plus fortes sont tolérées sur de courtes distances ✓

Réponse. 360 cm horizontalement, soit une rampe de $\approx 360,45$ cm (3,61 m), sous un angle de $\approx 2,86^\circ$.

Correction de l'exercice 5 - Deux visées d'un ballon

— **Notation** : h l'altitude, x la distance horizontale au premier observateur ✓

— **Premier observateur** : $\tan 32^\circ = \frac{h}{x}$, donc $x = \frac{h}{\tan 32^\circ}$ ✓

— **Second observateur** : $\tan 48^\circ = \frac{h}{500 - x}$, donc $500 - x = \frac{h}{\tan 48^\circ}$ ✓

— **Somme** : $\frac{h}{\tan 32^\circ} + \frac{h}{\tan 48^\circ} = 500$ ✓

— **Valeurs** : $\tan 32^\circ \approx 0,6249$ et $\tan 48^\circ \approx 1,1106$ ✓

— **Inverses** : $\approx 1,6003$ et $\approx 0,9004$ ✓

— **Équation** : $h(1,6003 + 0,9004) = 500$ ✓

— **Somme des coefficients** : 2,5007 ✓

— **Altitude** :

$$h \approx \frac{500}{2,5007} \approx 199,94 \text{ m}$$

— **Distance au premier observateur** : $\approx 199,94 \times 1,6003 \approx 319,96 \text{ m}$ ✓

— **Distance au second** : $500 - 319,96 \approx 180,04 \text{ m}$ ✓

— **Contrôle de la première visée** : $\arctan \frac{199,94}{319,96} \approx 32,00^\circ$ ✓

— **Contrôle de la seconde** : $\arctan \frac{199,94}{180,04} \approx 48,00^\circ$ ✓

— **Contrôle de vraisemblance** : le ballon est plus proche de l'observateur qui le voit sous le plus **grand** angle ✓

— **Vérification** : $180 < 320$ ✓

— **Distances de visée** : $\frac{199,94}{\sin 32^\circ} \approx 377,30 \text{ m}$ et $\frac{199,94}{\sin 48^\circ} \approx 269,05 \text{ m}$ ✓

— **Remarque de méthode** : cette configuration permet de mesurer une altitude sans se placer sous le ballon ✓

Réponse. $h \approx 199,94 \text{ m}$, à $\approx 320 \text{ m}$ du premier observateur et $\approx 180 \text{ m}$ du second.

Correction de l'exercice 6 - Ombre et hauteur du soleil

— **Relation** : $\tan \alpha = \frac{\text{hauteur}}{\text{ombre}}$ ✓

— **Calcul** : $\tan \alpha = \frac{4,50}{6,20} \approx 0,7258$ ✓

— **Hauteur du soleil** :

$$\alpha \approx 35,97^\circ$$

— **Contrôle** : $\tan 35,97^\circ \approx 0,7258$ ✓

— **Pour l'arbre** : même angle solaire, donc même rapport ✓

— **Proportionnalité** : $\frac{\text{hauteur}}{15} = 0,7258$ ✓

— **Hauteur de l'arbre** :

$$15 \times 0,7258 \approx 10,89 \text{ m}$$

— **Méthode sans trigonométrie** : la configuration de Thalès suffit ✓

— **Calcul direct** : $\frac{4,50}{6,20} = \frac{h}{15}$, donc $h = \frac{4,50 \times 15}{6,20} \approx 10,89 \text{ m}$ ✓

— **Cohérence** : les deux méthodes concordent ✓

- **Contrôle de vraisemblance** : l'ombre est plus longue que la hauteur, donc le soleil est **bas** ✓
 - **Vérification** : $35,97^\circ < 45^\circ$ ✓
 - **Ombre à midi solaire en été** : le soleil monterait à 65° , et l'ombre du poteau ne ferait que $\frac{4,50}{\tan 65^\circ} \approx 2,10$ m ✓
 - **Ombre au coucher** : elle tend vers l'**infini** quand l'angle tend vers 0° ✓
 - **Longueur de visée vers le sommet du poteau** : $\sqrt{20,25 + 38,44} = \sqrt{58,69} \approx 7,661$ m ✓
 - **Application historique** : c'est ainsi qu'Ératosthène a mesuré la Terre, vers -240 ✓
 - **Méthode d'Ératosthène** : comparer deux ombres à la même heure en deux villes ✓
- Réponse.** Soleil à $\approx 35,97^\circ$, et l'arbre mesure $\approx 10,89$ m.

Correction de l'exercice 7 - Toboggan

- **Le toboggan est l'hypoténuse** ✓
 - **Hauteur de départ** : le côté opposé à l'angle ✓
 - **Relation** : $\sin 38^\circ = \frac{h}{4,80}$ ✓
 - **Valeur** : $\sin 38^\circ \approx 0,6157$ ✓
 - **Hauteur** :
$$h \approx 4,80 \times 0,6157 \approx 2,955 \text{ m}$$
 - **Longueur au sol** : le côté adjacent ✓
 - **Relation** : $\cos 38^\circ = \frac{d}{4,80}$ ✓
 - **Valeur** : $\cos 38^\circ \approx 0,7880$ ✓
 - **Longueur** :
$$d \approx 4,80 \times 0,7880 \approx 3,782 \text{ m}$$
 - **Contrôle par Pythagore** : $8,732 + 14,304 = 23,036$, et $4,80^2 = 23,04$ ✓
 - **Contrôle par la tangente** : $\frac{2,955}{3,782} \approx 0,7813$ ✓
 - **Valeur attendue** : $\tan 38^\circ \approx 0,7813$ ✓
 - **Contrôle de l'ordre** : $38^\circ < 45^\circ$, donc la hauteur est **inférieure** à la longueur au sol ✓
 - **Vérification** : $2,955 < 3,782$ ✓
 - **Emprise totale au sol** : 3,78 m, à laquelle il faut ajouter la zone de réception ✓
 - **Si l'angle passait à 45°** : $h = d = 4,80 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 3,394$ m ✓
 - **Gain de hauteur** : $\approx 0,44$ m ✓
 - **Perte d'emprise** : $\approx 0,39$ m ✓
 - **Conclusion** : redresser le toboggan gagne de la hauteur et de la place, mais le rend plus rapide — d'où les limites de sécurité ✓
- Réponse.** Hauteur $\approx 2,96$ m et longueur au sol $\approx 3,78$ m.

Correction de l'exercice 8 - Navigation

- **Schéma** : triangle rectangle, angle droit au point de virage ✓
- **Distance au port** : l'hypoténuse ✓
- **Pythagore** :

$$d = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15 \text{ km}$$

- **Triplet reconnaissable** : 9-12-15, soit trois fois 3-4-5 ✓
- **Angle au port, entre l'est et la direction du bateau** : $\tan \alpha = \frac{9}{12} = 0,75$ ✓
- **Mesure** : $\alpha \approx 36,87^\circ$ ✓
- **Cap du bateau vu du port** : $36,87^\circ$ au nord de l'est ✓
- **En notation de cap (depuis le nord, sens horaire)** : $90 - 36,87 = 53,13^\circ$ ✓
- **Cap de retour** : la direction opposée ✓
- **Calcul** :

$$53,13 + 180 = 233,13^\circ$$

- **Contrôle de vraisemblance** : le retour va vers le sud-ouest, ce qui est logique ✓
- **Contrôle** : 233° correspond bien au secteur sud-ouest ✓
- **Distance économisée** : $12 + 9 - 15 = 6 \text{ km}$ ✓
- **Proportion économisée** : $\frac{6}{21} \approx 28,6\%$ ✓
- **Contrôle de l'angle par le cosinus** : $\cos \alpha = \frac{12}{15} = 0,8$ ✓
- **Vérification** : $\arccos(0,8) \approx 36,87^\circ$ ✓
- **Durée du retour à 18 km/h** : $\frac{15}{18} \approx 0,833 \text{ h}$, soit 50 min ✓

Réponse. 15 km du port, avec un cap de retour de $\approx 233,13^\circ$ (sud-ouest).

Correction de l'exercice 9 - Escalier

- **Angle d'une marche** : $\tan \alpha = \frac{17}{28}$ ✓
- **Valeur** : $\approx 0,6071$ ✓
- **Mesure** :

$$\alpha \approx 31,26^\circ$$

- **Contrôle** : $\tan 31,26^\circ \approx 0,6072$ ✓
- **Pour 16 marches** : hauteur totale $16 \times 17 = 272 \text{ cm}$ ✓
- **Profondeur totale** : $16 \times 28 = 448 \text{ cm}$ ✓
- **Longueur de rampe** : l'hypoténuse ✓
- **Pythagore** :

$$\sqrt{272^2 + 448^2} = \sqrt{73\,984 + 200\,704} = \sqrt{274\,688} \approx 524,11 \text{ cm}$$
- **Arrondi** : 5,24 m ✓
- **Contrôle par l'angle** : $\frac{272}{\sin 31,26^\circ} \approx \frac{272}{0,5190} \approx 524,16 \text{ cm}$ ✓
- **Cohérence** : les deux méthodes concordent ✓
- **Contrôle de l'angle sur l'escalier entier** : $\arctan \frac{272}{448} \approx 31,26^\circ$ ✓
- **Cohérence** : l'angle ne dépend pas du nombre de marches ✓
- **Règle de confort (formule de Blondel)** : $2 \times \text{hauteur} + \text{profondeur}$ doit être entre 60 et 64 cm ✓
- **Contrôle** : $2 \times 17 + 28 = 62 \text{ cm}$ ✓
- **Conclusion** : cet escalier est **confortable** ✓
- **Hauteur d'étage franchie** : 2,72 m ✓
- **Emprise au sol** : 4,48 m, ce qui est important — d'où les escaliers tournants ✓

Réponse. $\alpha \approx 31,26^\circ$, et une rampe de $\approx 524,11$ cm (5,24 m) pour 16 marches.

Correction de l'exercice 10 - Triangle isocèle

- **Hauteur** : elle coupe la base en son milieu ✓
- **Demi-base** : 5 cm ✓
- **Pythagore** :

$$h = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

- **Triplet reconnaissable** : 5-12-13 ✓
- **Angle à la base** : $\cos \beta = \frac{5}{13} \approx 0,3846$ ✓
- **Mesure** :

$$\beta \approx 67,38^\circ$$

- **Contrôle par la tangente** : $\tan \beta = \frac{12}{5} = 2,4$ ✓
- **Vérification** : $\arctan(2,4) \approx 67,38^\circ$ ✓
- **Angle au sommet** : $180 - 2 \times 67,38 = 45,24^\circ$ ✓
- **Contrôle par le demi-angle** : $\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{5}{12} \approx 0,4167$ ✓
- **Vérification** : $\arctan(0,4167) \approx 22,62^\circ$, et $2 \times 22,62 = 45,24^\circ$ ✓
- **Cohérence** : $67,38 \times 2 + 45,24 = 180^\circ$ ✓
- **Aire** :

$$A = \frac{10 \times 12}{2} = 60 \text{ cm}^2$$

- **Périmètre** : $13 + 13 + 10 = 36$ cm ✓
- **Rayon du cercle inscrit** : $\frac{2 \times 60}{36} \approx 3,333$ cm ✓
- **Hauteur relative à un grand côté** : $\frac{2 \times 60}{13} \approx 9,231$ cm ✓
- **Contrôle par le sinus** : $13 \times \sin 45,24^\circ \approx 13 \times 0,7101 \approx 9,231$ cm ✓

Réponse. Hauteur 12 cm, angles $\approx 67,38^\circ$ à la base et $\approx 45,24^\circ$ au sommet, aire 60 cm^2 .

Correction de l'exercice 11 - Avion en approche

- **Schéma** : triangle rectangle, l'altitude en côté opposé ✓
- **Relation** : $\tan 3^\circ = \frac{3000}{\text{distance horizontale}}$ ✓
- **Valeur** : $\tan 3^\circ \approx 0,05241$ ✓
- **Distance horizontale** :

$$\frac{3000}{0,05241} \approx 57\,242 \text{ m} \approx 57,24 \text{ km}$$

- **Distance parcourue** : l'hypoténuse ✓
- **Relation** : $\sin 3^\circ = \frac{3000}{\text{distance}}$ ✓
- **Valeur** : $\sin 3^\circ \approx 0,05234$ ✓
- **Distance** :

$$\frac{3000}{0,05234} \approx 57\,321 \text{ m} \approx 57,32 \text{ km}$$

- **Écart avec l'horizontale** : 79 m, soit 0,14 % ✓
- **Conclusion** : pour un angle aussi faible, les deux distances sont quasi identiques ✓

- **Contrôle par Pythagore** : $\sqrt{57\,242^2 + 3000^2} \approx 57\,320 \text{ m} \checkmark$
- **Contrôle de l'angle** : $\arctan \frac{3000}{57\,242} \approx 3,00^\circ \checkmark$
- **Règle des pilotes** : la descente en pieds par minute vaut environ 5 fois la vitesse sol en nœuds $\checkmark$
- **Pente de 3° en pourcentage** : $5,24\% \checkmark$
- **Durée à 400 km/h** : $\frac{57,32}{400} \approx 0,1433 \text{ h}$, soit environ 8,6 min $\checkmark$
- **Vitesse verticale** : $\frac{3000}{8,6 \times 60} \approx 5,8 \text{ m/s} \checkmark$
- **En pieds par minute** : $\approx 1142 \text{ ft/min}$, une valeur standard en approche $\checkmark$

Réponse. Distance horizontale $\approx 57,24 \text{ km}$ et distance parcourue $\approx 57,32 \text{ km}$.

Correction de l'exercice 12 - Diagonale d'un écran

- **Rapport des côtés** : $\frac{\text{largeur}}{\text{hauteur}} = \frac{16}{9} \checkmark$
- **Notation** : largeur = $16k$ et hauteur = $9k \checkmark$
- **Diagonale** : $\sqrt{256k^2 + 81k^2} = k\sqrt{337} \checkmark$
- **Équation** : $k\sqrt{337} = 140 \checkmark$
- **Valeur** : $\sqrt{337} \approx 18,358 \checkmark$
- **Résolution** : $k \approx 7,626 \checkmark$
- **Largeur** :

$$16 \times 7,626 \approx 122,02 \text{ cm}$$

- **Hauteur** :

$$9 \times 7,626 \approx 68,64 \text{ cm}$$

- **Contrôle par Pythagore** : $14\,889 + 4711 = 19\,600 = 140^2 \checkmark$
- **Angle avec l'horizontale** : $\tan \theta = \frac{9}{16} = 0,5625 \checkmark$
- **Mesure** :

$$\theta \approx 29,36^\circ$$

- **Contrôle** : $\tan 29,36^\circ \approx 0,5624 \checkmark$
- **Remarque** : cet angle ne dépend que du **format**, pas de la taille $\checkmark$
- **Aire de l'écran** : $122,02 \times 68,64 \approx 8375,5 \text{ cm}^2$, soit $\approx 0,84 \text{ m}^2 \checkmark$
- **Comparaison avec un format 4:3 de même diagonale** : $\sqrt{16 + 9} = 5$, donc largeur 112 cm et hauteur 84 cm $\checkmark$
- **Aire correspondante** : $9408 \text{ cm}^2 \checkmark$
- **Conclusion** : à diagonale égale, le format 4:3 offre **plus** de surface $\checkmark$
- **Écart** : $\frac{9408 - 8375,5}{8375,5} \approx 12,3\% \checkmark$

Réponse. Largeur $\approx 122,02 \text{ cm}$, hauteur $\approx 68,64 \text{ cm}$, angle $\approx 29,36^\circ$.

Correction de l'exercice 13 - Deux angles, une hauteur

- **Schéma** : l'observateur est en hauteur, le mât en bas et devant lui $\checkmark$
- **Première visée — vers le pied** : angle de dépression $18^\circ \checkmark$
- **Relation** : $\tan 18^\circ = \frac{60}{d}$, où d est la distance horizontale $\checkmark$
- **Valeur** : $\tan 18^\circ \approx 0,3249 \checkmark$

- **Distance** : $d \approx \frac{60}{0,3249} \approx 184,67 \text{ m} \checkmark$
- **Seconde visée — vers le sommet** : angle d'élévation $12^\circ \checkmark$
- **Hauteur du sommet au-dessus de l'observateur** : $d \times \tan 12^\circ \checkmark$
- **Valeur** : $\tan 12^\circ \approx 0,2126 \checkmark$
- **Calcul** : $\approx 184,67 \times 0,2126 \approx 39,26 \text{ m} \checkmark$
- **Hauteur totale du mât** : de son pied jusqu'à son sommet $\checkmark$
- **Calcul** :

$$h \approx 60 + 39,26 = 99,26 \text{ m}$$

- **Contrôle de vraisemblance** : le sommet du mât est au-dessus de l'observateur, donc le mât dépasse 60 m $\checkmark$
- **Vérification** : $99,26 > 60 \checkmark$
- **Contrôle de la première visée** : $\arctan \frac{60}{184,67} \approx 18,00^\circ \checkmark$
- **Contrôle de la seconde** : $\arctan \frac{39,26}{184,67} \approx 12,00^\circ \checkmark$
- **Formule générale** : $h = d(\tan 18^\circ + \tan 12^\circ) \checkmark$
- **Contrôle** : $184,67 \times (0,3249 + 0,2126) \approx 184,67 \times 0,5375 \approx 99,26 \text{ m} \checkmark$
- **Angle total sous lequel on voit le mât** : $18 + 12 = 30^\circ \checkmark$

Réponse. $h \approx 99,26 \text{ m}$ (distance horizontale $\approx 184,67 \text{ m}$).

Correction de l'exercice 14 - Section d'un tuyau

- **Rayon** : 15 cm $\checkmark$
- **Distance du centre à la surface libre** : $15 - 9 = 6 \text{ cm} \checkmark$
- **Demi-largeur** : par Pythagore, $\sqrt{225 - 36} = \sqrt{189} \approx 13,748 \text{ cm} \checkmark$
- **Largeur de la surface libre** :

$$2\sqrt{189} \approx 27,50 \text{ cm}$$

- **Contrôle de vraisemblance** : $27,50 < 30 \checkmark$
- **Demi-angle au centre** : $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{6}{15} = 0,4 \checkmark$
- **Mesure** : $\frac{\theta}{2} \approx 66,42^\circ \checkmark$
- **Angle au centre** :

$$\theta \approx 132,84^\circ$$

- **Contrôle par le sinus** : $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{13,748}{15} \approx 0,9165 \checkmark$
- **Vérification** : $\arcsin(0,9165) \approx 66,42^\circ \checkmark$
- **Contrôle de Pythagore trigonométrique** : $0,16 + 0,84 = 1,00 \checkmark$
- **Remplissage à mi-hauteur** : la surface libre passerait par le centre, avec $\theta = 180^\circ \checkmark$
- **Largeur alors** : 30 cm, le diamètre $\checkmark$
- **Remplissage à 3 cm** : distance au centre 12 cm, demi-largeur $\sqrt{225 - 144} = 9 \text{ cm} \checkmark$
- **Largeur** : 18 cm $\checkmark$
- **Angle correspondant** : $2 \arccos(0,8) \approx 73,74^\circ \checkmark$
- **Observation** : la largeur croît vite au début du remplissage, puis se stabilise $\checkmark$
- **Contrôle** : de 3 à 9 cm de hauteur, la largeur passe de 18 à 27,5 cm $\checkmark$

Réponse. Largeur $2\sqrt{189} \approx 27,50 \text{ cm}$ et angle au centre $\approx 132,84^\circ$.

Correction de l'exercice 15 - Câble de téléphérique

— **Le câble est l'hypoténuse** ✓

— **Relation** : $\sin \alpha = \frac{1200}{3500}$ ✓

— **Valeur** : $\approx 0,3429$ ✓

— **Angle moyen** :

$$\alpha \approx 20,05^\circ$$

— **Contrôle** : $\sin 20,05^\circ \approx 0,3429$ ✓

— **Distance horizontale** : par Pythagore ✓

— **Calcul** :

$$\sqrt{3500^2 - 1200^2} = \sqrt{12\,250\,000 - 1\,440\,000} = \sqrt{10\,810\,000} \approx 3288 \text{ m}$$

— **Contrôle par le cosinus** : $3500 \times \cos 20,05^\circ \approx 3500 \times 0,9394 \approx 3288 \text{ m}$ ✓

— **Cohérence** : les deux méthodes concordent ✓

— **Pente en pourcentage** : $\frac{1200}{3288} \approx 36,5\%$ ✓

— **Contrôle** : $\tan 20,05^\circ \approx 0,3650$ ✓

— **Contrôle de vraisemblance** : 20° est une pente moyenne plausible pour un téléphérique ✓

— **Comparaison** : les pentes de ski noires font 30 % à 40 % ✓

— **Durée du trajet à 6 m/s** : $\frac{3500}{6} \approx 583 \text{ s}$, soit environ 9,7 min ✓

— **Vitesse verticale** : $\frac{1200}{583} \approx 2,06 \text{ m/s}$ ✓

— **Contrôle** : $6 \times \sin 20,05^\circ \approx 2,06 \text{ m/s}$ ✓

— **Si la pente atteignait 45°** : le câble devrait mesurer $\frac{1200}{\sin 45^\circ} \approx 1697 \text{ m}$ ✓

— **Lecture** : la pente réelle est bien plus douce que 45° ✓

Réponse. $\alpha \approx 20,05^\circ$ et une distance horizontale de $\approx 3288 \text{ m}$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un chantier

a) **Hauteur gagnée par la flèche** : $40 \times \sin 25^\circ$ ✓

— **Valeur** : $\sin 25^\circ \approx 0,4226$ ✓

— **Calcul** : $\approx 16,90 \text{ m}$ ✓

— **Altitude du bout** :

$$30 + 16,90 = 46,90 \text{ m}$$

— **Portée horizontale** : $40 \times \cos 25^\circ$ ✓

— **Valeur** : $\cos 25^\circ \approx 0,9063$ ✓

— **Calcul** :

$$\approx 36,25 \text{ m}$$

— **Contrôle par Pythagore** : $285,6 + 1314,1 = 1599,7$, et $40^2 = 1600$ ✓

b) **Longueur du câble** : du bout de la flèche jusqu'au sol, verticalement ✓

— **Résultat** :

$$46,90 \text{ m}$$

— **Contrôle** : c'est exactement l'altitude du bout ✓

— **Avec 3 m de mou pour le crochet** : $\approx 50 \text{ m}$ de câble utile ✓

c) **Objectif** : une portée horizontale de 50 m ✓

— **Problème** : la flèche ne mesure que 40 m ✓

— **Portée maximale possible** : 40 m, flèche **horizontale** ✓

— **Conclusion** : 50 m est **hors de portée** ✓

— **Angle requis théoriquement** : $\cos \alpha = \frac{50}{40} = 1,25 > 1$, impossible ✓

— **Solution pratique** : déplacer la grue, ou incliner la flèche vers le bas si elle le permet ✓

— **Portée pour une charge à 35 m** : $\cos \alpha = \frac{35}{40} = 0,875$ ✓

— **Angle** : $\approx 28,96^\circ$ ✓

— **Altitude correspondante** : $30 + 40 \times \sin 28,96^\circ \approx 30 + 19,37 = 49,36$ m ✓

— **Contrôle** : $\sqrt{1600 - 1225} = \sqrt{375} \approx 19,365$ m ✓

d) **Altitude maximale** : atteinte quand la flèche est **verticale** ✓

— **Angle** : 90° ✓

— **Altitude** :

$$30 + 40 = 70 \text{ m}$$

— **Portée correspondante** : $40 \times \cos 90^\circ = 0$ m ✓

— **Interprétation** : à l'altitude maximale, la charge est juste au-dessus du mât ✓

— **Compromis fondamental** : altitude et portée sont **antagonistes** ✓

— **Relation liant les deux** : si p est la portée et a l'altitude, alors $p^2 + (a - 30)^2 = 1600$ ✓

— **Nature de cette relation** : le bout de la flèche décrit un **quart de cercle** de rayon 40 m ✓

— **Contrôle pour la question a)** : $36,25^2 + 16,90^2 \approx 1314,1 + 285,6 = 1599,7$ ✓

— **Altitude pour une portée de 20 m** : $30 + \sqrt{1600 - 400} = 30 + \sqrt{1200} \approx 64,64$ m ✓

— **Angle correspondant** : $\arccos \frac{20}{40} = 60^\circ$ ✓

— **Contrôle** : $40 \times \sin 60^\circ \approx 34,64$ m, et $30 + 34,64 = 64,64$ m ✓

— **Conclusion pour le chantier** : pour travailler loin, il faut une flèche **longue**, pas seulement un mât haut ✓

Réponse. a) altitude $\approx 46,90$ m et portée $\approx 36,25$ m · b) $\approx 46,90$ m de câble · c) impossible, $50 > 40$ m · d) 70 m d'altitude pour une portée nulle.