Plaquette 3 – Problèmes de mesure : hauteurs, pentes et distances

Trigonométrie (triangle rectangle) — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Choisir le bon rapport. On regarde ce qu'on connaît et ce qu'on cherche.

On connaît	On cherche	Rapport
hypoténuse et angle	côté adjacent	cos
hypoténuse et angle	côté opposé	sin
côté adjacent et angle	côté opposé	tan
deux côtés de l'angle droit	angle	tan
un côté et l'hypoténuse	angle	cos ou sin

Moyen mnémotechnique. « CAH-SOH-TOA » : **C**os = **A**djacent sur **H**ypoténuse, **S**in = **O**pposé sur **H**ypoténuse, **T**an = **O**pposé sur **A**djacent.

Vocabulaire des situations concrètes.

Terme	Signification géométrique
angle d'élévation	angle entre l'horizontale et la visée vers le haut
angle de dépression	angle entre l'horizontale et la visée vers le bas
pente en %	$100 \times \tan\alpha$
dénivelé	côté vertical
distance parcourue	souvent l'hypoténuse, pas l'horizontale

Trois pièges récurrents.

— Confondre la distance **le long de la pente** (hypoténuse) et la distance **horizontale** (côté adjacent).

— Oublier la **hauteur de l'observateur** ou de l'instrument.

— Utiliser la calculatrice dans un autre mode que le mode degré : un cosinus de 0,15 pour un angle de 30° doit alerter.

Visée d'une hauteur. Pour un observateur placé à la distance horizontale d du pied, qui vise le sommet sous l'angle d'élévation α avec l'œil à la hauteur h_0 :

$$H = d \times \tan\alpha + h_0$$

Contrôle par les ordres de grandeur. Pour un angle inférieur à 45°, le côté opposé est **plus petit** que le côté adjacent ; au-delà de 45°, c'est l'inverse.

Correction de l'exercice 1 – Hauteur d'un immeuble

L'angle de 58° est mesuré depuis l'œil, à 1,70 m du sol : le triangle rectangle utile a pour sommet l'œil, pour côté adjacent l'horizontale de 40 m jusqu'à l'immeuble, et pour côté opposé la partie de l'immeuble **au-dessus de l'œil**.

$$\text{opposé} = 40 \times \tan 58° \approx 40 \times 1{,}6003 \approx 64{,}01 \text{ m}$$

On ajoute la hauteur de l'œil : $h \approx 64{,}01 + 1{,}70 = 65{,}71$ m. **Contrôle** : l'angle dépasse

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

45°, donc le côté opposé doit être plus long que le côté adjacent, et 64,01 > 40. Oublier les 1,70 m est l'erreur classique.

Réponse. $h \approx 40\tan 58° + 1{,}70 \approx 65{,}71$ m.

Correction de l'exercice 2 – Angle de dépression

L'angle de dépression est mesuré entre l'horizontale passant par l'observateur et la ligne de visée. Comme l'horizontale du haut de la falaise est parallèle au sol, la ligne de visée fait aussi un angle de 23° avec le sol, au niveau du bateau (angles alternes-internes).

Dans le triangle rectangle au pied de la falaise, pour l'angle de 23° au bateau, la falaise (80 m) est le côté opposé et la distance cherchée d le côté adjacent :

$$\tan 23° = \frac{80}{d} \Leftrightarrow d = \frac{80}{\tan 23°} \approx \frac{80}{0{,}4245} \approx 188{,}5 \text{ m}$$

Contrôle avec l'angle au sommet de la falaise, $90° - 23° = 67°$: $80 \times \tan 67° \approx 188{,}5$ m. Un petit angle de dépression correspond à un bateau éloigné : la distance dépasse bien la hauteur.

Réponse. $\dfrac{80}{\tan 23°} \approx 188{,}47$ m.

Correction de l'exercice 3 – Longueur d'un câble

Le pylône est vertical et le sol horizontal : le triangle formé par le pylône, le sol et le câble est rectangle au pied du pylône. Le câble est l'hypoténuse, donc par Pythagore

$$c = \sqrt{18^2 + 7^2} = \sqrt{324 + 49} = \sqrt{373} \approx 19{,}31 \text{ m}$$

Pour l'angle α au sol, le pylône est le côté opposé et la distance de 7 m le côté adjacent : $\tan\alpha = \dfrac{18}{7} \approx 2{,}571$, d'où $\alpha \approx 68{,}7°$. **Contrôle** avec le cosinus : $\dfrac{7}{19{,}31} \approx 0{,}362$, et la calculatrice redonne environ 68,7°. Le câble est très redressé, car l'ancrage est proche du pied.

Réponse. Câble $\sqrt{373} \approx 19{,}31$ m, faisant un angle de $\approx 68{,}75°$ avec le sol.

Correction de l'exercice 4 – Rampe pour personnes à mobilité réduite

Une pente de 5 % signifie 5 cm de montée pour 100 cm à l'horizontale. Pour monter de 18 cm, il faut donc au minimum $\dfrac{18}{0{,}05} = 360$ cm à l'horizontale. La rampe elle-même est l'hypoténuse du triangle formé :

$$\sqrt{360^2 + 18^2} = \sqrt{129\,600 + 324} = \sqrt{129\,924} \approx 360{,}45 \text{ cm}$$

soit environ 3,61 m. L'angle vérifie $\tan\alpha = 0{,}05$, donc $\alpha \approx 2{,}86°$. Pour une pente aussi faible, la rampe est à peine plus longue que sa projection horizontale (0,45 cm d'écart sur 360 cm).

Réponse. 360 cm horizontalement, soit une rampe de $\approx 360{,}45$ cm (3,61 m), sous un angle de $\approx 2{,}86°$.

Correction de l'exercice 5 – Deux visées d'un ballon

On note h l'altitude du ballon et x la distance horizontale entre le premier observateur et le point du sol situé sous le ballon ; la distance pour le second vaut $500 - x$. Les deux triangles rectangles donnent

$$x = \frac{h}{\tan 32°} \qquad 500 - x = \frac{h}{\tan 48°}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

En additionnant, $h\left(\dfrac{1}{\tan 32°}+\dfrac{1}{\tan 48°}\right)=500$, soit $h\times(1{,}6003+0{,}9004)\approx 500$ et $h\approx\dfrac{500}{2{,}5007}\approx 199{,}9$ m.

Le ballon est alors à $x\approx 199{,}9\times 1{,}6003\approx 320$ m du premier observateur et 180 m du second. **Contrôle** : il est plus proche de l'observateur qui le voit sous le plus grand angle, ce qui est logique.

Réponse. $h\approx 199{,}94$ m, à ≈ 320 m du premier observateur et ≈ 180 m du second.

Correction de l'exercice 6 – Ombre et hauteur du soleil

Le poteau, son ombre et le rayon de soleil forment un triangle rectangle. La hauteur du soleil α est l'angle au bout de l'ombre : le poteau est le côté opposé, l'ombre le côté adjacent.

$$\tan\alpha=\frac{4{,}50}{6{,}20}\approx 0{,}7258\quad\text{donc}\quad\alpha\approx 36{,}0°$$

Au même moment, les rayons arrivent sous le même angle sur l'arbre : sa hauteur vaut $15\times\tan\alpha\approx 15\times 0{,}7258\approx 10{,}89$ m. **Contrôle** sans trigonométrie : les triangles sont semblables, donc $\dfrac{h}{15}=\dfrac{4{,}50}{6{,}20}$, ce qui redonne $h\approx 10{,}89$ m. L'ombre étant plus longue que le poteau, le soleil est sous 45°.

Réponse. Soleil à $\approx 35{,}97°$, et l'arbre mesure $\approx 10{,}89$ m.

Correction de l'exercice 7 – Toboggan

Le toboggan, le sol et la verticale passant par le haut du toboggan forment un triangle rectangle dont le toboggan est l'hypoténuse. La hauteur de départ est le côté opposé à l'angle de 38°, la longueur au sol le côté adjacent :

$$h=4{,}80\times\sin 38°\approx 2{,}96\text{ m}\qquad d=4{,}80\times\cos 38°\approx 3{,}78\text{ m}$$

Contrôle par Pythagore : $2{,}955^2+3{,}782^2\approx 8{,}73+14{,}30=23{,}03\approx 4{,}80^2$. L'angle étant inférieur à 45°, la hauteur est bien plus petite que l'emprise au sol.

Réponse. Hauteur $\approx 2{,}96$ m et longueur au sol $\approx 3{,}78$ m.

Correction de l'exercice 8 – Navigation

Le trajet vers l'est puis vers le nord forme un angle droit : la distance au port est l'hypoténuse.

$$d=\sqrt{12^2+9^2}=\sqrt{144+81}=\sqrt{225}=15\text{ km}$$

Vu du port, la direction du bateau fait avec l'est un angle α tel que $\tan\alpha=\dfrac{9}{12}=0{,}75$, soit $\alpha\approx 36{,}9°$ au nord de l'est. Un cap se mesure depuis le nord dans le sens des aiguilles d'une montre : le bateau est au cap $90°-36{,}9°=53{,}1°$ depuis le port. Pour rentrer, il suit la direction opposée, $53{,}1°+180°=233{,}1°$, c'est-à-dire vers le sud-ouest. Le trajet direct économise $12+9-15=6$ km.

Réponse. 15 km du port, avec un cap de retour de $\approx 233{,}13°$ (sud-ouest).

Correction de l'exercice 9 – Escalier

Chaque marche forme un petit triangle rectangle de hauteur 17 cm et de profondeur 28 cm ; la rampe suit leurs hypoténuses. L'angle avec le sol vérifie

$$\tan\alpha=\frac{17}{28}\approx 0{,}607\quad\text{donc}\quad\alpha\approx 31{,}3°$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Pour 16 marches, l'escalier monte de $16 \times 17 = 272$ cm sur $16 \times 28 = 448$ cm : le grand triangle est un agrandissement du petit, avec le même angle. La rampe mesure $\sqrt{272^2 + 448^2} = \sqrt{274\,688} \approx 524{,}1$ cm, soit environ 5,24 m. **Contrôle** : $16 \times \sqrt{17^2 + 28^2} = 16 \times \sqrt{1073} \approx 524{,}1$ cm. Selon la règle de Blondel, $2 \times 17 + 28 = 62$ cm est dans la plage confortable de 60 à 64 cm.

Réponse. $\alpha \approx 31{,}26°$, et une rampe de $\approx 524{,}11$ cm (5,24 m) pour 16 marches.

Correction de l'exercice 10 – Triangle isocèle

Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal coupe la base en son milieu : elle forme deux triangles rectangles d'hypoténuse 13 cm et de petit côté 5 cm. Par Pythagore :

$$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

L'angle à la base vérifie $\cos\beta = \dfrac{5}{13}$, d'où $\beta \approx 67{,}4°$, et l'angle au sommet vaut $180° - 2 \times 67{,}38° \approx 45{,}2°$. L'aire vaut $\dfrac{10 \times 12}{2} = 60$ cm². **Contrôle** : la moitié de l'angle au sommet vérifie $\tan = \dfrac{5}{12}$, ce qui donne 22,6°, et $2 \times 22{,}6° = 45{,}2°$.

Réponse. Hauteur 12 cm, angles $\approx 67{,}38°$ à la base et $\approx 45{,}24°$ au sommet, aire 60 cm².

Correction de l'exercice 11 – Avion en approche

L'altitude de 3000 m est le côté opposé à l'angle de descente de 3°. La distance horizontale est le côté adjacent, la trajectoire l'hypoténuse :

$$d_{\text{hor}} = \frac{3000}{\tan 3°} \approx 57\,240 \text{ m} \qquad d_{\text{parcourue}} = \frac{3000}{\sin 3°} \approx 57\,320 \text{ m}$$

soit environ 57,24 km et 57,32 km. Pour un angle aussi faible, les deux distances ne diffèrent que d'environ 80 m. **Contrôle** par Pythagore : $\sqrt{57\,242^2 + 3000^2} \approx 57\,320$ m. En pourcentage, la pente de descente vaut $\tan 3° \approx 5{,}2\,\%$.

Réponse. Distance horizontale ≈ 57,24 km et distance parcourue ≈ 57,32 km.

Correction de l'exercice 12 – Diagonale d'un écran

Le format 16:9 signifie que la largeur et la hauteur sont proportionnelles à 16 et 9 : on les note $16k$ et $9k$. La diagonale est l'hypoténuse du triangle rectangle formé :

$$\sqrt{(16k)^2 + (9k)^2} = k\sqrt{337} = 140 \quad \text{donc} \quad k = \frac{140}{\sqrt{337}} \approx 7{,}626$$

La largeur vaut $16k \approx 122{,}0$ cm et la hauteur $9k \approx 68{,}6$ cm. L'angle de la diagonale avec l'horizontale vérifie $\tan\theta = \dfrac{9k}{16k} = \dfrac{9}{16}$, d'où $\theta \approx 29{,}4°$; il ne dépend que du format, pas de la taille de l'écran. **Contrôle** : $122{,}02^2 + 68{,}64^2 \approx 14\,889 + 4\,711 = 19\,600 = 140^2$.

Réponse. Largeur ≈ 122,02 cm, hauteur ≈ 68,64 cm, angle ≈ 29,36°.

Correction de l'exercice 13 – Deux angles, une hauteur

On trace l'horizontale passant par l'œil de l'observateur ; elle rencontre le mât en un point K, situé à 60 m du sol. La distance horizontale d entre l'observateur et le mât est la même pour les deux visées.

Visée vers le pied : la verticale de 60 m est opposée à l'angle de 18°, donc $d = \dfrac{60}{\tan 18°} \approx 184{,}7$ m. Visée vers le sommet : la partie du mât au-dessus de K est

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

opposée à l'angle de 12° :

$$d \times \tan 12° \approx 184{,}67 \times 0{,}2126 \approx 39{,}26 \text{ m}$$

Le mât mesure donc $60 + 39{,}26 \approx 99{,}3$ m. **Contrôle** : son sommet est au-dessus de l'observateur, il doit dépasser 60 m ; et l'on vérifie $d \times (\tan 18° + \tan 12°) \approx 184{,}67 \times 0{,}5375 \approx 99{,}3$ m.

Réponse. $h \approx 99{,}26$ m (distance horizontale $\approx 184{,}67$ m).

Correction de l'exercice 14 – Section d'un tuyau

Le rayon vaut 15 cm. L'eau monte à 9 cm du fond, donc la surface libre est à $15 - 9 = 6$ cm **sous** le centre. Le rayon joignant le centre à une extrémité de la surface, la perpendiculaire du centre à la surface et la demi-surface forment un triangle rectangle d'hypoténuse 15 :

$$\text{demi-largeur} = \sqrt{15^2 - 6^2} = \sqrt{189} \approx 13{,}75 \text{ cm}$$

La surface libre mesure donc $2\sqrt{189} \approx 27{,}5$ cm, un peu moins que le diamètre. Le demi-angle au centre vérifie $\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{6}{15} = 0{,}4$, d'où $\dfrac{\theta}{2} \approx 66{,}4°$ et $\theta \approx 132{,}8°$. **Contrôle** : si le tuyau était rempli à moitié, la surface passerait par le centre et l'angle vaudrait 180° ; ici l'eau est sous le centre, l'angle est plus petit.

Réponse. Largeur $2\sqrt{189} \approx 27{,}50$ cm et angle au centre $\approx 132{,}84°$.

Correction de l'exercice 15 – Câble de téléphérique

Le câble est l'hypoténuse du triangle rectangle formé avec la verticale (1200 m de dénivelé, côté opposé à l'angle de pente) et l'horizontale :

$$\sin\alpha = \frac{1200}{3500} \approx 0{,}343 \quad \text{donc} \quad \alpha \approx 20{,}0°$$

La distance horizontale vaut, par Pythagore, $\sqrt{3500^2 - 1200^2} = \sqrt{10\,810\,000} \approx 3288$ m. **Contrôle** avec le cosinus : $3500 \times \cos 20{,}05° \approx 3288$ m. En pourcentage, la pente moyenne vaut $\dfrac{1200}{3288} \approx 36{,}5\,\%$.

Réponse. $\alpha \approx 20{,}05°$ et une distance horizontale de ≈ 3288 m.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : un chantier

a) La flèche de 40 m est l'hypoténuse d'un triangle rectangle d'angle 25° : elle s'élève de $40 \times \sin 25° \approx 16{,}90$ m au-dessus du haut du mât, et s'avance de $40 \times \cos 25° \approx 36{,}25$ m.

$$\text{altitude} \approx 30 + 16{,}90 = 46{,}90 \text{ m} \qquad \text{portée} \approx 36{,}25 \text{ m}$$

b) Le câble descend verticalement du bout de la flèche jusqu'au sol : sa longueur égale l'altitude du bout, soit environ 46,90 m.

c) La portée horizontale vaut $40 \times \cos\alpha$, et un cosinus ne dépasse jamais 1 : la portée est au plus 40 m, atteinte flèche horizontale. Une charge à 50 m est donc **hors de portée** ; il faudrait déplacer la grue.

d) L'altitude $30 + 40 \times \sin\alpha$ est la plus grande quand $\sin\alpha$ est le plus grand, c'est-à-dire flèche verticale : $30 + 40 = 70$ m, pour une portée nulle. Plus on gagne en hauteur, plus on perd en portée.

Réponse. a) altitude $\approx 46{,}90$ m et portée $\approx 36{,}25$ m · b) $\approx 46{,}90$ m de câble · c) impossible, $50 > 40$ m · d) 70 m d'altitude pour une portée nulle.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).