

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse :
topographie, technique et vie courante
Trigonométrie (triangle rectangle) — Seconde
 Corrections détaillées

Boîte à outils
Récapitulatif complet.

$$\cos \alpha = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} \quad \sin \alpha = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \quad \tan \alpha = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$

$$\text{hyp}^2 = \text{opp}^2 + \text{adj}^2 \quad \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

Les valeurs exactes à connaître.

α	30°	45°	60°
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Convertir une pente.

$$\text{pente en \%} = 100 \tan \alpha \quad \alpha = \arctan\left(\frac{\text{pente}}{100}\right)$$

Petits angles. Pour α inférieur à quelques degrés, $\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$ (en radians) : les distances horizontale et oblique deviennent presque égales.

Grands angles. Au-delà de 80° , la tangente **explose** : une petite erreur d'angle provoque une grande erreur de distance. On évite ces configurations en topographie.

Rédiger une réponse complète. Le calcul, l'unité, l'arrondi précisé, et une phrase de contexte. Une valeur numérique seule n'est jamais une réponse.

Trois contrôles avant de conclure.

- l'hypoténuse est le **plus grand** côté ;
- la somme des angles vaut 180° ;
- l'ordre de grandeur est plausible dans le contexte.

Correction de l'exercice 1 - Largeur d'une vallée

- **Dénivelé** : $1850 - 1200 = 650 \text{ m}$ ✓
- **Première visée** : $\tan 28^\circ = \frac{650}{d_1}$ ✓
- **Valeur** : $\tan 28^\circ \approx 0,5317$ ✓
- **Distance horizontale** : $d_1 \approx \frac{650}{0,5317} \approx 1222,5 \text{ m}$ ✓
- **Seconde visée** : $\tan 41^\circ = \frac{650}{d_2}$ ✓
- **Valeur** : $\tan 41^\circ \approx 0,8693$ ✓
- **Distance horizontale** : $d_2 \approx \frac{650}{0,8693} \approx 747,7 \text{ m}$ ✓

— **Largeur de la vallée** : les deux points étant de part et d'autre, on **additionne** ✓

— **Calcul** :

$$L \approx 1222,5 + 747,7 \approx 1970,2 \text{ m}$$

— **Contrôle de vraisemblance** : une vallée de 2 km de large est courante en montagne ✓

— **Contrôle de la première visée** : $\arctan \frac{650}{1222,5} \approx 28,00^\circ$ ✓

— **Contrôle de la seconde** : $\arctan \frac{650}{747,7} \approx 41,00^\circ$ ✓

— **Distances de visée** : $\frac{650}{\sin 28^\circ} \approx 1384,5 \text{ m}$ ✓

— **Puis** : $\frac{650}{\sin 41^\circ} \approx 990,8 \text{ m}$ ✓

— **Observation** : le versant vu sous 41° est plus **raide**, donc plus proche ✓

— **Cohérence** : $747,7 < 1222,5$ ✓

— **Pentes moyennes des deux versants** : 53,2 % et 86,9 % ✓

Réponse. $L \approx 1222,5 + 747,7 \approx 1970,2 \text{ m}$, soit près de 2 km.

Correction de l'exercice 2 - Pyramide de Khéops

— **Demi-côté** : 115 m ✓

— **Angle d'une face avec le sol** : $\tan \alpha = \frac{146}{115}$ ✓

— **Valeur** : $\approx 1,2696$ ✓

— **Mesure** :

$$\alpha \approx 51,77^\circ$$

— **Contrôle** : $\tan 51,77^\circ \approx 1,2695$ ✓

— **Apothème** : $\sqrt{146^2 + 115^2}$ ✓

— **Calcul** : $\sqrt{21\,316 + 13\,225} = \sqrt{34\,541} \approx 185,85 \text{ m}$ ✓

— **Contrôle par le sinus** : $\frac{146}{\sin 51,77^\circ} \approx \frac{146}{0,7855} \approx 185,86 \text{ m}$ ✓

— **Cohérence** : les deux méthodes concordent ✓

— **Arête latérale** : demi-diagonale $115\sqrt{2} \approx 162,63 \text{ m}$ ✓

— **Calcul** : $\sqrt{21\,316 + 26\,450} = \sqrt{47\,766} \approx 218,55 \text{ m}$ ✓

— **Angle d'une arête avec le sol** : $\arctan \frac{146}{162,63} \approx 41,93^\circ$ ✓

— **Aire latérale** : $4 \times \frac{230 \times 185,85}{2} \approx 85\,491 \text{ m}^2$ ✓

— **Volume** : $\frac{52\,900 \times 146}{3} \approx 2\,574\,467 \text{ m}^3$ ✓

— **Contrôle de vraisemblance** : environ 2,6 millions de m^3 , cohérent avec les 2,3 millions de blocs estimés ✓

— **Fait célèbre** : le rapport $\frac{\text{périmètre}}{\text{hauteur}} = \frac{920}{146} \approx 6,301$ ✓

— **Comparaison à 2π** : $2\pi \approx 6,283$ ✓

— **Écart** : 0,3 %, ce qui a nourri bien des spéculations ✓

Réponse. $\alpha \approx 51,77^\circ$ et apothème $\approx 185,85 \text{ m}$.

Correction de l'exercice 3 - Panneau solaire

- **Hauteur du panneau** : $1,70 \times \sin 35^\circ \checkmark$
- **Valeur** : $\sin 35^\circ \approx 0,5736 \checkmark$
- **Calcul** :

$$h \approx 0,975 \text{ m}$$

- **Emprise horizontale** : $1,70 \times \cos 35^\circ \checkmark$
- **Valeur** : $\cos 35^\circ \approx 0,8192 \checkmark$
- **Calcul** :

$$d \approx 1,393 \text{ m}$$

- **Contrôle par Pythagore** : $0,951 + 1,940 = 2,891$, et $1,70^2 = 2,89 \checkmark$
- **Condition d'optimalité** : le panneau doit être **perpendiculaire** aux rayons $\checkmark$
- **Soleil à 55° de hauteur** : ses rayons font 55° avec l'horizontale $\checkmark$
- **Inclinaison optimale** : $90 - 55 = 35^\circ \checkmark$
- **Conclusion remarquable** : l'inclinaison actuelle est **déjà** optimale pour ce soleil $\checkmark$
- **Vérification** : le panneau à 35° et les rayons à 55° forment bien un angle droit $\checkmark$
- **Contrôle** : $35 + 55 = 90^\circ \checkmark$
- **Puissance captée si le soleil était à 30°** : elle serait réduite d'un facteur $\cos(90 - 30 - 35) \dots \checkmark$
- **Calcul de l'angle d'incidence** : $|55 - 30| = 25^\circ$ d'écart $\checkmark$
- **Facteur de réduction** : $\cos 25^\circ \approx 0,9063 \checkmark$
- **Perte** : environ $9,4\% \checkmark$
- **Règle pratique** : en France, on incline les panneaux d'environ 30° à 35° , compromis entre été et hiver $\checkmark$

Réponse. Hauteur $\approx 0,98$ m et emprise $\approx 1,39$ m ; l'inclinaison de 35° est **déjà** optimale pour un soleil à 55° .

Correction de l'exercice 4 - Virage relevé

- **Schéma** : la largeur de 6 m est mesurée le long de la piste inclinée $\checkmark$
- **Différence de hauteur** : le côté opposé à l'angle $\checkmark$
- **Relation** : $\sin 12^\circ = \frac{h}{6} \checkmark$
- **Valeur** : $\sin 12^\circ \approx 0,2079 \checkmark$
- **Calcul** :

$$h \approx 6 \times 0,2079 \approx 1,247 \text{ m}$$

- **Largeur projetée à l'horizontale** : $6 \times \cos 12^\circ \approx 5,869 \text{ m} \checkmark$
- **Valeur** : $\cos 12^\circ \approx 0,9781 \checkmark$
- **Contrôle par Pythagore** : $1,555 + 34,445 = 36,000$, et $6^2 = 36 \checkmark$
- **Contrôle par la tangente** : $\frac{1,247}{5,869} \approx 0,213 \checkmark$
- **Valeur attendue** : $\tan 12^\circ \approx 0,213 \checkmark$
- **Pente latérale en pourcentage** : $21,3\% \checkmark$
- **Contrôle de vraisemblance** : 1,25 m de dévers sur 6 m est important mais réaliste pour un vélodrome $\checkmark$
- **Comparaison** : les virages d'autoroute sont relevés de 2° à 7% seulement $\checkmark$
- **Dévers pour 7%** : $6 \times 0,07 \approx 0,42 \text{ m} \checkmark$

- **Vélodrome olympique** : les virages atteignent 42° ✓
- **Dévers alors** : $6 \times \sin 42^\circ \approx 4,01$ m ✓
- **Rapport** : plus de trois fois le dévers de notre piste ✓
- **Intérêt physique** : le relevé compense la force centrifuge, permettant de virer plus vite ✓

Réponse. $h \approx 6 \sin 12^\circ \approx 1,25$ m de différence de hauteur.

Correction de l'exercice 5 - Profondeur d'un puits

- **Schéma** : triangle rectangle, l'horizontale au fond du puits ✓
- **Côté horizontal** : le diamètre, soit 1,20 m ✓
- **Côté vertical** : la profondeur ✓
- **Angle** : 58° , entre le rayon solaire et l'horizontale ✓
- **Relation** : $\tan 58^\circ = \frac{\text{profondeur}}{1,20}$ ✓
- **Valeur** : $\tan 58^\circ \approx 1,6003$ ✓
- **Profondeur** :

$$p \approx 1,20 \times 1,6003 \approx 1,920 \text{ m}$$
- **Contrôle de vraisemblance** : 1,92 m est peu profond pour un puits, mais l'énoncé décrit le moment où le soleil éclaire **tout** le fond ✓
- **Longueur du rayon dans le puits** : $\frac{1,20}{\cos 58^\circ} \approx \frac{1,20}{0,5299} \approx 2,264$ m ✓
- **Contrôle par Pythagore** : $1,44 + 3,687 = 5,127$, et $2,264^2 \approx 5,126$ ✓
- **Si le puits faisait 5 m de profondeur** : l'angle requis serait $\arctan \frac{5}{1,20} \approx 76,50^\circ$ ✓
- **Observation** : un tel angle ne s'atteint jamais en France ✓
- **Hauteur maximale du soleil à Paris** (latitude $48,9^\circ$, au solstice d'été) : $\approx 64,6^\circ$ ✓
- **Profondeur maximale éclairée intégralement** : $1,20 \times \tan 64,6^\circ \approx 2,52$ m ✓
- **Conclusion** : le fond d'un puits profond n'est **jamais** entièrement éclairé sous nos latitudes ✓
- **Cas d'Assouan** (latitude 24°) : le soleil y passe au zénith au solstice ✓
- **Conséquence historique** : c'est cette observation qui a permis à Ératosthène de mesurer la Terre ✓
- **Contrôle** : à 90° , la tangente est infinie, tout puits vertical est éclairé jusqu'au fond ✓

Réponse. $p \approx 1,20 \tan 58^\circ \approx 1,92$ m.

Correction de l'exercice 6 - Triangulation d'un point

- **Notation** : h la distance de P à la ligne, x la distance de A au pied de la perpendiculaire ✓
- **Attention** : les deux angles sont du **même côté**, P n'est donc pas entre A et B ✓
- **Analyse** : $65^\circ > 50^\circ$, donc la perpendiculaire tombe **en dehors** du segment, du côté de B ✓
- **Depuis A** : $\tan 65^\circ = \frac{h}{x}$, donc $x = \frac{h}{\tan 65^\circ}$ ✓
- **Depuis B** : $\tan 50^\circ = \frac{h}{x - 800}$, donc $x - 800 = \frac{h}{\tan 50^\circ}$ ✓
- **Soustraction** : $\frac{h}{\tan 65^\circ} - \frac{h}{\tan 50^\circ} = 800$ ✓
- **Valeurs** : $\tan 65^\circ \approx 2,1445$ et $\tan 50^\circ \approx 1,1918$ ✓

- **Inverses** : $\approx 0,4663$ et $\approx 0,8391$ ✓
- **Différence** : $0,4663 - 0,8391 = -0,3728$ ✓
- **Signe négatif** : la configuration supposée est **impossible** ✓
- **Reprise du raisonnement** : si P est **entre** les deux perpendiculaires, les distances s'additionnent ✓
- **Équation correcte** : $\frac{h}{\tan 65^\circ} + \frac{h}{\tan 50^\circ} = 800$ ✓
- **Somme des inverses** : $0,4663 + 0,8391 = 1,3054$ ✓
- **Distance cherchée** :

$$h \approx \frac{800}{1,3054} \approx 612,83 \text{ m}$$

- **Contrôle** : $x \approx 612,83 \times 0,4663 \approx 285,76$ m depuis A , et $514,24$ m depuis B ✓
- **Contrôle de la somme** : $285,76 + 514,24 = 800$ m ✓
- **Contrôle des angles** : $\arctan \frac{612,83}{285,76} \approx 65,00^\circ$ et $\arctan \frac{612,83}{514,24} \approx 50,00^\circ$ ✓

Réponse. $h \approx \frac{800}{\frac{1}{\tan 65^\circ} + \frac{1}{\tan 50^\circ}} \approx 612,83 \text{ m.}$

Correction de l'exercice 7 - Hauteur d'un nuage

- **Schéma** : triangle rectangle, le faisceau vertical en côté opposé ✓
- **Côté adjacent** : 500 m, la distance au projecteur ✓
- **Relation** : $\tan 63^\circ = \frac{\text{altitude}}{500}$ ✓
- **Valeur** : $\tan 63^\circ \approx 1,9626$ ✓
- **Altitude** :

$$h \approx 500 \times 1,9626 \approx 981,3 \text{ m}$$

- **Contrôle de vraisemblance** : un plafond nuageux à 1000 m est courant ✓
- **Distance de visée** : $\frac{500}{\cos 63^\circ} \approx \frac{500}{0,4540} \approx 1101,3$ m ✓
- **Contrôle par Pythagore** : $250\,000 + 962\,950 = 1\,212\,950$, et $1101,3^2 \approx 1\,212\,862$ ✓
- **Sensibilité à l'angle** : à 64° , on trouverait $500 \times 2,0503 \approx 1025,2$ m ✓
- **Écart** : environ 44 m pour 1° ✓
- **Écart relatif** : $4,5\%$ ✓
- **Conclusion** : la mesure est **sensible**, il faut un bon théodolite ✓
- **Amélioration possible** : s'éloigner davantage du projecteur ✓
- **À 1000 m, pour la même altitude** : l'angle serait $\arctan \frac{981,3}{1000} \approx 44,46^\circ$ ✓
- **Sensibilité alors** : à $45,46^\circ$, on trouverait $1000 \times \tan 45,46^\circ \approx 1016,2$ m ✓
- **Écart** : 35 m pour 1° , soit $3,6\%$ ✓
- **Cohérence** : la mesure est plus précise près de 45° , où la tangente varie le moins vite en relatif ✓

Réponse. $h \approx 500 \tan 63^\circ \approx 981,3 \text{ m.}$

Correction de l'exercice 8 - Longueur d'une courroie

- **Structure de la courroie** : deux segments droits et deux demi-cercles ✓
- **Poulies de même rayon** : les segments droits sont **parallèles** à la ligne des centres ✓

- **Longueur de chaque segment** : la distance des centres, soit 45 cm ✓
- **Justification** : les tangentes communes extérieures sont parallèles à l'axe quand les rayons sont égaux ✓
- **Deux segments** : 90 cm ✓
- **Arcs enroulés** : chaque poulie en porte un **demi-tour** ✓
- **Justification** : les deux demi-arcs se complètent en un cercle entier ✓
- **Longueur des arcs** : $2\pi \times 8 = 16\pi \approx 50,265$ cm ✓
- **Longueur totale** :

$$L = 90 + 16\pi \approx 140,27 \text{ cm}$$

- **Contrôle de vraisemblance** : 140 cm pour un entraxe de 45 cm est cohérent ✓
- **Encadrement** : la courroie doit dépasser $2 \times 45 = 90$ cm ✓
- **Vérification** : $140,27 > 90$ ✓
- **Si l'entraxe passait à 60 cm** : $120 + 16\pi \approx 170,27$ cm ✓
- **Variation** : +30 cm pour +15 cm d'entraxe ✓
- **Règle** : la longueur croît de **deux fois** la variation d'entraxe ✓
- **Angle d'enroulement sur chaque poulie** : 180° ✓
- **Cas de rayons différents** : les segments droits ne seraient plus parallèles à l'axe, et le calcul exigerait un angle supplémentaire ✓

Réponse. $L = 2 \times 45 + 2\pi \times 8 = 90 + 16\pi \approx 140,27$ cm.

Correction de l'exercice 9 - Portée d'un jet d'eau

- **Modélisation** : on suppose le jet **rectiligne**, ce qui est une simplification ✓
- **Hauteur à gagner** : $9 - 1,50 = 7,50$ m ✓
- **Relation** : $\tan 40^\circ = \frac{7,50}{d}$ ✓
- **Valeur** : $\tan 40^\circ \approx 0,8391$ ✓
- **Distance** :

$$d \approx \frac{7,50}{0,8391} \approx 8,938 \text{ m}$$

- **Contrôle de vraisemblance** : environ 9 m du mur, ce qui est réaliste ✓
- **Longueur du jet** : $\frac{7,50}{\sin 40^\circ} \approx \frac{7,50}{0,6428} \approx 11,668$ m ✓
- **Contrôle par Pythagore** : $79,89 + 56,25 = 136,14$, et $11,668^2 \approx 136,14$ ✓
- **Pour une fenêtre à 15 m** : hauteur à gagner 13,50 m ✓
- **Distance** : $\approx 16,088$ m ✓
- **Proportionnalité** : la distance est **proportionnelle** à la hauteur à gagner ✓
- **Contrôle** : $\frac{13,50}{7,50} = 1,8$, et $\frac{16,088}{8,938} = 1,8$ ✓
- **Limite du modèle** : un jet réel suit une **parabole**, il retombe ✓
- **Conséquence pratique** : il faut viser **plus haut** que la cible ✓
- **Angle réel nécessaire** : supérieur à 40° , d'autant plus que la portée est grande ✓
- **Angle de portée maximale pour un projectile** : 45° ✓
- **Remarque** : les lances réelles sont réglées empiriquement, pas par ce calcul ✓

Réponse. $d \approx \frac{7,50}{\tan 40^\circ} \approx 8,94$ m du mur (modèle rectiligne).

Correction de l'exercice 10 - Diagonale d'une pièce

- **Plus grande longueur** : la grande diagonale du pavé ✓
- **Diagonale du sol** : $\sqrt{27,04 + 14,44} = \sqrt{41,48} \approx 6,440$ m ✓
- **Grande diagonale** : $\sqrt{41,48 + 6,25} = \sqrt{47,73}$ ✓
- **Calcul** :

$$D \approx 6,909 \text{ m}$$

- **Contrôle par la formule directe** : $\sqrt{5,20^2 + 3,80^2 + 2,50^2} = \sqrt{47,73}$ ✓
- **Angle avec le sol** : $\tan \alpha = \frac{2,50}{6,440}$ ✓
- **Valeur** : $\approx 0,3882$ ✓
- **Mesure** :

$$\alpha \approx 21,22^\circ$$

- **Contrôle par le sinus** : $\frac{2,50}{6,909} \approx 0,3619$ ✓
- **Vérification** : $\arcsin(0,3619) \approx 21,22^\circ$ ✓
- **Contrôle par le cosinus** : $\frac{6,440}{6,909} \approx 0,9321$ ✓
- **Vérification** : $\arccos(0,9321) \approx 21,22^\circ$ ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : $D \approx 6,91$ m dépasse la plus grande dimension, 5,20 m ✓
- **Comparaison avec la diagonale du sol** : $6,909 > 6,440$ ✓
- **Gain apporté par la hauteur** : 0,469 m seulement ✓
- **Explication** : la hauteur est petite devant les autres dimensions, son apport est donc faible ✓
- **Volume de la pièce** : $5,20 \times 3,80 \times 2,50 = 49,4$ m³ ✓
- **Surface au sol** : 19,76 m² ✓

Réponse. $D = \sqrt{47,73} \approx 6,91$ m, faisant un angle de $\approx 21,22^\circ$ avec le sol.

Correction de l'exercice 11 - Angle d'un escalier hélicoïdal

- **Nombre de marches par tour** : $\frac{360}{20} = 18$ marches ✓
- **Hauteur d'un tour** : $18 \times 18 = 324$ cm, soit 3,24 m ✓
- **Longueur de la circonférence extérieure** : $2\pi \times 1,10 = 2,2\pi \approx 6,912$ m ✓
- **Déroulement** : on « déplie » l'hélice en un triangle rectangle ✓
- **Côtés** : 6,912 m (horizontal) et 3,24 m (vertical) ✓
- **Longueur du limon** :

$$\sqrt{47,78 + 10,50} = \sqrt{58,28} \approx 7,633 \text{ m}$$

- **Angle de la pente** : $\tan \alpha = \frac{3,24}{6,912}$ ✓
- **Valeur** : $\approx 0,4688$ ✓
- **Mesure** :

$$\alpha \approx 25,11^\circ$$

- **Contrôle** : $\tan 25,11^\circ \approx 0,4688$ ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : 25° est une pente douce, adaptée à un escalier ✓

- **Profondeur d'une marche au limon** : $\frac{6,912}{18} \approx 0,384$ m ✓
- **Contrôle de la formule de Blondel** : $2 \times 18 + 38,4 = 74,4$ cm ✓
- **Verdict** : au-delà de la plage confortable de 60 à 64 cm, les marches sont trop profondes au limon ✓
- **Explication** : dans un escalier hélicoïdal, la profondeur varie du centre vers l'extérieur ✓
- **Profondeur à 0,55 m du centre** : $\frac{2\pi \times 0,55}{18} \approx 0,192$ m ✓
- **Contrôle de Blondel à cette distance** : $36 + 19,2 = 55,2$ cm, un peu trop raide ✓
- **Conclusion** : le confort est atteint vers le **tiers extérieur** du giron, là où l'on marche naturellement ✓

Réponse. Limon $\approx 7,63$ m par tour, avec une pente de $\approx 25,11^\circ$.

Correction de l'exercice 12 - Ombre d'un bâtiment

- **Relation** : ombre = $\frac{\text{hauteur}}{\tan \alpha}$ ✓
- À 20° : $\tan 20^\circ \approx 0,3640$ ✓
- **Ombre** : $\frac{24}{0,3640} \approx 65,94$ m ✓
- À 40° : $\tan 40^\circ \approx 0,8391$ ✓
- **Ombre** : $\frac{24}{0,8391} \approx 28,60$ m ✓
- À 60° : $\tan 60^\circ \approx 1,7321$ ✓
- **Ombre** : $\frac{24}{1,7321} \approx 13,86$ m ✓
- **Tableau des résultats** :

Hauteur du soleil	Longueur de l'ombre
20°	$\approx 65,94$ m
40°	$\approx 28,60$ m
60°	$\approx 13,86$ m

- **Observation** : l'ombre **n'est pas** proportionnelle à l'angle ✓
- **Contrôle** : doubler l'angle de 20° à 40° divise l'ombre par 2,3, non par 2 ✓
- **De 40° à 60°** : l'ombre est divisée par 2,06 pour 1,5 fois l'angle ✓
- **Comportement aux extrêmes** : quand $\alpha \rightarrow 0$, l'ombre tend vers l'**infini** ✓
- **Quand $\alpha \rightarrow 90^\circ$** : l'ombre tend vers 0 ✓
- **Angle donnant une ombre égale à la hauteur** : 45° ✓
- **Contrôle** : $\frac{24}{1} = 24$ m ✓
- **Application urbaine** : c'est le calcul du **prospect**, la distance minimale entre bâtiments ✓
- **Règle courante** : la distance doit être au moins égale à la hauteur, ce qui garantit du soleil au-dessus de 45° ✓

Réponse. $\approx 65,94$ m à 20° , $\approx 28,60$ m à 40° , $\approx 13,86$ m à 60° — l'ombre varie comme $\frac{1}{\tan \alpha}$.

Correction de l'exercice 13 - Pente d'un toit et longueur de chevron

- **Signification de 22 %** : 22 cm de montée pour 100 cm horizontaux ✓
- **Hauteur gagnée** : $7,20 \times 0,22$ ✓
- **Calcul** :

$$h = 1,584 \text{ m}$$

- **Angle** : $\tan \alpha = 0,22$ ✓
- **Mesure** :

$$\alpha \approx 12,41^\circ$$

- **Contrôle** : $\tan 12,41^\circ \approx 0,2200$ ✓
- **Longueur du chevron** : l'hypoténuse ✓
- **Pythagore** : $\sqrt{51,84 + 2,509}$ ✓
- **Calcul** :

$$\ell = \sqrt{54,349} \approx 7,372 \text{ m}$$

- **Contrôle par le cosinus** : $\frac{7,20}{\cos 12,41^\circ} \approx \frac{7,20}{0,9767} \approx 7,372 \text{ m}$ ✓
- **Cohérence** : les deux méthodes concordent ✓
- **Supplément de longueur par rapport à l'horizontale** : 0,172 m ✓
- **Écart relatif** : 2,4 % ✓
- **Conclusion** : pour une pente modérée, le chevron dépasse peu la largeur ✓
- **Surface de toiture pour 12 m de longueur de bâtiment** : $7,372 \times 12 \approx 88,46 \text{ m}^2$ ✓
- **Surface au sol couverte** : $7,20 \times 12 = 86,40 \text{ m}^2$ ✓
- **Écart** : $2,06 \text{ m}^2$, soit 2,4 % ✓
- **Cohérence** : le même écart relatif que sur les longueurs ✓
- **Pente minimale pour des tuiles** : environ 30 %, soit $16,7^\circ$ ✓
- **Verdict** : à 22 %, il faudrait plutôt du bac acier ou une membrane ✓

Réponse. Hauteur 1,584 m, angle $\approx 12,41^\circ$, chevron $\approx 7,37 \text{ m}$.

Correction de l'exercice 14 - Trois visées depuis un bateau

- **Première position** : $\tan 4^\circ = \frac{60}{d_1}$ ✓
- **Valeur** : $\tan 4^\circ \approx 0,0699$ ✓
- **Distance** : $d_1 \approx \frac{60}{0,0699} \approx 858,4 \text{ m}$ ✓
- **Seconde position** : $\tan 9^\circ = \frac{60}{d_2}$ ✓
- **Valeur** : $\tan 9^\circ \approx 0,1584$ ✓
- **Distance** : $d_2 \approx \frac{60}{0,1584} \approx 378,8 \text{ m}$ ✓
- **Distance parcourue** :

$$858,4 - 378,8 \approx 479,6 \text{ m}$$

- **Contrôle de vraisemblance** : le bateau s'est rapproché de près de 500 m ✓
- **Contrôle de la première visée** : $\arctan \frac{60}{858,4} \approx 4,00^\circ$ ✓
- **Contrôle de la seconde** : $\arctan \frac{60}{378,8} \approx 9,00^\circ$ ✓

- **Vitesse si la manœuvre a duré 4 minutes** : $\frac{479,6}{240} \approx 2,0 \text{ m/s} \checkmark$
- **Conversion en nœuds** : $2,0 \times 1,944 \approx 3,9 \text{ nœuds} \checkmark$
- **Sensibilité de la première mesure** : à 5° , on trouverait $\frac{60}{0,0875} \approx 685,8 \text{ m} \checkmark$
- **Écart** : 173 m pour $1^\circ \checkmark$
- **Écart relatif** : 20 % $\checkmark$
- **Sensibilité de la seconde** : à 10° , on trouverait 340,3 m, soit 38,5 m d'écart $\checkmark$
- **Conclusion** : les visées à faible angle sont **très** imprécises $\checkmark$
- **Règle du marin** : on préfère les relèvements croisés au sextant pour les distances lointaines $\checkmark$

Réponse. $858,4 - 378,8 \approx 479,6 \text{ m}$ parcourus.

Correction de l'exercice 15 - Angle de champ d'un objectif

- **Modélisation** : triangle rectangle, demi-capteur et focale $\checkmark$
- **Demi-largeur du capteur** : 18 mm $\checkmark$
- **Demi-angle de champ** : $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{18}{50} = 0,36 \checkmark$
- **Mesure du demi-angle** : $\approx 19,80^\circ \checkmark$
- **Angle de champ** :

$$\theta \approx 39,60^\circ$$

- **Contrôle** : c'est bien l'angle de champ horizontal usuel d'un 50 mm $\checkmark$
- **Largeur cadrée à 10 m** : $2 \times 10\,000 \times 0,36 \text{ mm} \checkmark$
- **Calcul** : 7200 mm, soit

$$7,20 \text{ m}$$

- **Contrôle par proportionnalité** : $\frac{36}{50} = \frac{7200}{10\,000} \checkmark$
- **Cohérence** : les deux rapports valent 0,72 $\checkmark$
- **Règle pratique** : la largeur cadrée vaut $\frac{\text{capteur}}{\text{focale}}$ fois la distance $\checkmark$
- **Avec un 28 mm** : $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{18}{28} \approx 0,6429 \checkmark$
- **Angle de champ** : $2 \times 32,74 \approx 65,47^\circ \checkmark$
- **Largeur cadrée à 10 m** : $\frac{36}{28} \times 10 \approx 12,86 \text{ m} \checkmark$
- **Avec un 200 mm** : $\tan \frac{\theta}{2} = 0,09$, soit un angle de $\approx 10,29^\circ \checkmark$
- **Largeur cadrée** : 1,80 m $\checkmark$
- **Observation** : l'angle de champ **n'est pas** inversement proportionnel à la focale $\checkmark$
- **Contrôle** : $\frac{200}{50} = 4$, mais $\frac{39,60}{10,29} \approx 3,85 \checkmark$

Réponse. $\theta \approx 39,60^\circ$ et une largeur cadrée de 7,20 m à 10 m.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : aménagement d'un terrain en pente

a) **Dénivelé** : $30 \times 0,15 \checkmark$

— **Calcul** :

$$4,50 \text{ m}$$

— **Angle** : $\tan \alpha = 0,15 \checkmark$

— **Mesure** :

$$\alpha \approx 8,53^\circ$$

— **Contrôle** : $\tan 8,53^\circ \approx 0,1500$ ✓

b) **Longueur réelle le long de la pente** : $\sqrt{900 + 20,25}$ ✓

— **Calcul** : $\sqrt{920,25} \approx 30,336$ m ✓

— **Contrôle par le cosinus** : $\frac{30}{\cos 8,53^\circ} \approx \frac{30}{0,9889} \approx 30,337$ m ✓

— **Surface réelle** :

$$\approx 30,336 \times 20 \approx 606,72 \text{ m}^2$$

— **Surface en projection** : 600 m^2 ✓

— **Écart** : $6,72 \text{ m}^2$, soit $1,12\%$ ✓

— **Remarque** : c'est la surface projetée qui compte au cadastre ✓

c) **Terrasse de 30 m^2 sur 20 m de largeur** ✓

— **Longueur** :

$$\frac{30}{20} = 1,50 \text{ m}$$

— **Position** : à mi-pente, soit à 15 m du bas ✓

— **Altitude du terrain naturel à mi-pente** : $15 \times 0,15 = 2,25 \text{ m}$ au-dessus du bas ✓

— **Dénivelé naturel sur les $1,50 \text{ m}$ de la terrasse** : $1,50 \times 0,15 = 0,225 \text{ m}$ ✓

— **Principe du déblai-remblai équilibré** : la terrasse est à l'altitude **moyenne** ✓

— **Hauteur du mur en aval** : la moitié du dénivelé, soit

$$\frac{0,225}{2} = 0,1125 \text{ m}$$

— **Conversion** : environ 11 cm ✓

— **Hauteur de déblai en amont** : également 11 cm ✓

— **Volume de déblai** : $\frac{0,1125}{2} \times 0,75 \times 20 \approx 0,84 \text{ m}^3$ ✓

— **Conclusion** : le mur est très bas, le terrassement quasi négligeable ✓

— **Contrôle de vraisemblance** : une terrasse de $1,50 \text{ m}$ de long sur une pente de 15% ne demande que 11 cm de rattrapage ✓

— **Si la terrasse mesurait 6 m de long** (sur 5 m de large, pour 30 m^2) : le dénivelé atteindrait $0,90 \text{ m}$, et le mur $0,45 \text{ m}$ ✓

d) **Dénivelé à franchir** : $4,50 \text{ m}$ ✓

— **Nombre de marches** : $\frac{450}{17} \approx 26,47$ ✓

— **Arrondi** : 27 marches ✓

— **Hauteur réelle de marche** : $\frac{450}{27} \approx 16,67 \text{ cm}$ ✓

— **Contrôle** : $27 \times 16,67 \approx 450 \text{ cm}$ ✓

— **Emprise horizontale** :

$$27 \times 0,30 = 8,10 \text{ m}$$

— **Contrôle de vraisemblance** : $8,10 \text{ m}$ sur les 30 m de longueur, soit 27% ✓

— **Pente de l'escalier** : $\tan \beta = \frac{4,50}{8,10} \approx 0,5556$ ✓

— **Angle** : $\approx 29,05^\circ$ ✓

— **Contrôle de Blondel** : $2 \times 16,67 + 30 = 63,34 \text{ cm}$ ✓

— **Verdict** : c'est dans la plage confortable de 60 à 64 cm ✓

- **Longueur du limon** : $\sqrt{20,25 + 65,61} = \sqrt{85,86} \approx 9,266 \text{ m}$ ✓
- **Comparaison avec la pente naturelle** : l'escalier ($29,05^\circ$) est bien plus raide que le terrain ($8,53^\circ$) ✓
- **Conséquence d'aménagement** : l'escalier ne suit donc pas la pente, il faut le placer en travers ou prévoir des paliers ✓

Réponse. a) 4,50 m et $\alpha \approx 8,53^\circ$ · b) $\approx 606,72 \text{ m}^2$ · c) 1,50 m de long, mur de $\approx 11 \text{ cm}$ · d) 27 marches et 8,10 m d'emprise.