Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : topographie, technique et vie courante

Trigonométrie (triangle rectangle) — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Récapitulatif complet.

$$\cos\alpha = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} \qquad \sin\alpha = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \qquad \tan\alpha = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$

$$\text{hyp}^2 = \text{opp}^2 + \text{adj}^2 \qquad \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Les valeurs exactes à connaître.

α	30°	45°	60°
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Convertir une pente.

$$\text{pente en \%} = 100\tan\alpha \qquad \alpha = \arctan\left(\frac{\text{pente}}{100}\right)$$

Petits angles. Pour α inférieur à quelques degrés, $\tan\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha$ (en radians) : les distances horizontale et oblique deviennent presque égales.

Grands angles. Au-delà de 80°, la tangente **explose** : une petite erreur d'angle provoque une grande erreur de distance. On évite ces configurations en topographie.

Rédiger une réponse complète. Le calcul, l'unité, l'arrondi précisé, et une phrase de contexte. Une valeur numérique seule n'est jamais une réponse.

Trois contrôles avant de conclure.

— l'hypoténuse est le **plus grand** côté ;
— la somme des angles vaut 180° ;
— l'ordre de grandeur est plausible dans le contexte.

Correction de l'exercice 1 – Largeur d'une vallée

Le dénivelé entre le sommet et le fond de la vallée vaut $1850 - 1200 = 650$ m. Pour chaque visée, la ligne de visée fait avec l'horizontale du fond le même angle que l'angle de dépression (angles alternes-internes) ; le dénivelé est le côté opposé et la distance horizontale le côté adjacent :

$$d_1 = \frac{650}{\tan 28°} \approx 1222{,}5 \text{ m} \qquad d_2 = \frac{650}{\tan 41°} \approx 747{,}7 \text{ m}$$

Les deux points sont de part et d'autre du sommet : leurs distances horizontales s'additionnent, et la vallée mesure environ $1222{,}5 + 747{,}7 = 1970{,}2$ m, près de 2 km. **Contrôle** : le point vu sous le plus grand angle (41°) est le plus proche.

Réponse. $L \approx 1222{,}5 + 747{,}7 \approx 1970{,}2$ m, soit près de 2 km.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 2 – Pyramide de Khéops

Dans le plan vertical passant par le sommet et le milieu d’un côté de la base, la hauteur (146 m), le demi-côté (115 m) et l’apothème forment un triangle rectangle. L’angle d’une face avec le sol est l’angle au pied de l’apothème :

$$\tan\alpha = \frac{146}{115} \approx 1{,}270 \quad \text{donc} \quad \alpha \approx 51{,}8°$$

L’apothème est l’hypoténuse : $\sqrt{146^2 + 115^2} = \sqrt{34\,541} \approx 185{,}9$ m. **Contrôle** avec le sinus : $\frac{146}{\sin 51{,}77°} \approx 185{,}9$ m. Le volume de la pyramide, $\frac{230^2 \times 146}{3} \approx 2{,}57$ millions de m³, montre l’ampleur du chantier.

Réponse. $\alpha \approx 51{,}77°$ et apothème $\approx 185{,}85$ m.

Correction de l’exercice 3 – Panneau solaire

Le panneau est l’hypoténuse d’un triangle rectangle d’angle 35° ; sa hauteur est le côté opposé, son emprise le côté adjacent :

$$h = 1{,}70 \times \sin 35° \approx 0{,}98 \text{ m} \qquad d = 1{,}70 \times \cos 35° \approx 1{,}39 \text{ m}$$

Un panneau capte le mieux la lumière quand les rayons lui arrivent **perpendiculairement**. Les rayons font 55° avec l’horizontale, le panneau 35° : dans le triangle formé par l’horizontale, le panneau et un rayon, les deux angles 35° et 55° ont pour somme 90°, donc le troisième angle, entre le panneau et le rayon, vaut $180° - 90° = 90°$. L’inclinaison actuelle est déjà la meilleure. **Contrôle** par Pythagore : $0{,}975^2 + 1{,}393^2 \approx 0{,}951 + 1{,}940 = 2{,}891 \approx 1{,}70^2$. Pour un soleil plus bas, à 30°, il faudrait incliner le panneau de $90° - 30° = 60°$.

Réponse. Hauteur $\approx 0{,}98$ m et emprise $\approx 1{,}39$ m ; l’inclinaison de 35° est **déjà** la meilleure pour un soleil à 55°.

Correction de l’exercice 4 – Virage relevé

La largeur de 6 m est mesurée le long de la piste inclinée : c’est l’hypoténuse d’un triangle rectangle dont la différence de hauteur est le côté opposé à l’angle de 12°.

$$h = 6 \times \sin 12° \approx 6 \times 0{,}2079 \approx 1{,}25 \text{ m}$$

La largeur vue d’en haut vaut $6 \times \cos 12° \approx 5{,}87$ m. **Contrôle** avec la tangente : $\frac{1{,}247}{5{,}869} \approx 0{,}212 \approx \tan 12°$. C’est un dévers important, de l’ordre de celui d’un vélodrome, qui permet de virer vite sans glisser.

Réponse. $h \approx 6 \sin 12° \approx 1{,}25$ m de différence de hauteur.

Correction de l’exercice 5 – Profondeur d’un puits

Le rayon de soleil qui frôle le bord du puits arrive exactement au pied de la paroi opposée. Il forme avec le fond (le diamètre, 1,20 m) et la paroi (la profondeur p) un triangle rectangle ; l’angle de 58° est au fond, entre le rayon et l’horizontale. La profondeur lui est opposée :

$$p = 1{,}20 \times \tan 58° \approx 1{,}20 \times 1{,}6003 \approx 1{,}92 \text{ m}$$

Contrôle : l’angle dépasse 45°, donc la profondeur dépasse le diamètre. Pour qu’un puits de 5 m soit éclairé jusqu’au fond, il faudrait $\tan\alpha = \frac{5}{1{,}20} \approx 4{,}17$, soit un soleil à 76,5° de hauteur, ce qui n’arrive jamais en France métropolitaine.

Réponse. $p \approx 1{,}20 \tan 58° \approx 1{,}92$ m.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 6 – Triangulation d’un point

Les angles de 65° et 50° sont deux angles du triangle ABP. On note H le pied de la perpendiculaire à (AB) issue de P, $h = PH$ et $x = AH$. Les deux angles étant aigus, H est entre A et B, donc $HB = 800 - x$. Dans les triangles rectangles AHP et BHP :

$$x = \frac{h}{\tan 65°} \qquad 800 - x = \frac{h}{\tan 50°}$$

En additionnant, $h\left(\frac{1}{\tan 65°} + \frac{1}{\tan 50°}\right) = 800$, soit $h \times (0{,}4663 + 0{,}8391) \approx 800$ et $h \approx \frac{800}{1{,}3054} \approx 612{,}8$ m.

Contrôle : $x \approx 612{,}8 \times 0{,}4663 \approx 285{,}8$ m et $800 - x \approx 514{,}2$ m, puis $\frac{612{,}8}{514{,}2} \approx 1{,}192 \approx \tan 50°$. Le pied H est plus proche de A, d’où l’on voit P sous le plus grand angle.

Réponse. $h = \dfrac{800}{\frac{1}{\tan 65°} + \frac{1}{\tan 50°}} \approx 612{,}8$ m.

Correction de l’exercice 7 – Hauteur d’un nuage

Le faisceau vertical, le sol entre l’observateur et le projecteur (500 m) et la ligne de visée forment un triangle rectangle au projecteur. L’altitude du nuage est opposée à l’angle d’élévation :

$$h = 500 \times \tan 63° \approx 500 \times 1{,}9626 \approx 981{,}3 \text{ m}$$

La mesure est sensible : avec 64°, on trouverait $500 \times \tan 64° \approx 1025$ m, soit 44 m d’écart pour un degré. En se plaçant à 1000 m du projecteur, on viserait sous un angle proche de 45°, où l’erreur relative est plus faible.

Réponse. $h \approx 500 \tan 63° \approx 981{,}3$ m.

Correction de l’exercice 8 – Longueur d’une courroie

La courroie se compose de deux segments rectilignes et de deux arcs enroulés sur les poulies. Les rayons étant égaux, les deux segments sont parallèles à la ligne des centres : chacun est tangent aux deux poulies, donc perpendiculaire aux deux rayons qui aboutissent à ses extrémités, et il forme avec eux et la ligne des centres un rectangle. Chaque segment mesure donc 45 cm.

Chaque poulie porte un demi-cercle de courroie, et les deux demi-cercles font un cercle complet de rayon 8 cm :

$$L = 2 \times 45 + 2\pi \times 8 = 90 + 16\pi \approx 140{,}3 \text{ cm}$$

Contrôle : la courroie est plus longue que $2 \times 45 = 90$ cm, et chaque centimètre d’entraxe supplémentaire l’allonge de 2 cm. Avec des rayons différents, les segments ne seraient plus parallèles et il faudrait de la trigonométrie pour calculer les arcs.

Réponse. $L = 2 \times 45 + 2\pi \times 8 = 90 + 16\pi \approx 140{,}27$ cm.

Correction de l’exercice 9 – Portée d’un jet d’eau

On modélise le jet par une droite. La lance est à 1,50 m du sol, la fenêtre à 9 m : le jet doit gagner $9 - 1{,}50 = 7{,}50$ m de hauteur. Avec l’horizontale passant par la lance et le mur, il forme un triangle rectangle d’angle 40° à la lance, où la hauteur à gagner est le côté opposé et la distance au mur le côté adjacent :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$d = \frac{7{,}50}{\tan 40°} \approx \frac{7{,}50}{0{,}8391} \approx 8{,}94 \text{ m}$$

Contrôle : l'angle est inférieur à 45°, donc la distance horizontale dépasse la hauteur gagnée. En réalité, le jet retombe en suivant une courbe : il faut viser un peu plus haut que ne l'indique ce modèle.

Réponse. $d \approx \frac{7{,}50}{\tan 40°} \approx 8{,}94$ m du mur (modèle rectiligne).

Correction de l'exercice 10 – Diagonale d'une pièce

L'objet le plus long qui tient dans la pièce joint deux coins opposés : c'est la grande diagonale du pavé. La diagonale du sol mesure $\sqrt{5{,}20^2 + 3{,}80^2} = \sqrt{41{,}48} \approx 6{,}44$ m. Elle est perpendiculaire à l'arête verticale de 2,50 m, ce qui donne un triangle rectangle dont la grande diagonale est l'hypoténuse :

$$D = \sqrt{41{,}48 + 2{,}50^2} = \sqrt{47{,}73} \approx 6{,}91 \text{ m}$$

L'angle avec le sol est l'angle entre D et la diagonale du sol : $\tan\alpha = \frac{2{,}50}{6{,}44} \approx 0{,}388$, d'où $\alpha \approx 21{,}2°$. **Contrôle** avec le sinus : $\frac{2{,}50}{6{,}909} \approx 0{,}362$ redonne 21,2°.

Réponse. $D = \sqrt{47{,}73} \approx 6{,}91$ m, faisant un angle de $\approx 21{,}22°$ avec le sol.

Correction de l'exercice 11 – Angle d'un escalier hélicoïdal

Un tour complet compte $\frac{360°}{20°} = 18$ marches et monte de $18 \times 18 = 324$ cm. Le long du limon extérieur, on parcourt horizontalement la circonférence $2\pi \times 1{,}10 \approx 6{,}912$ m. En « déroulant » le mur sur un plan, le limon devient l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés 6,912 m et 3,24 m :

$$\sqrt{6{,}912^2 + 3{,}24^2} \approx \sqrt{47{,}78 + 10{,}50} = \sqrt{58{,}28} \approx 7{,}63 \text{ m}$$

La pente vérifie $\tan\alpha = \frac{3{,}24}{6{,}912} \approx 0{,}469$, d'où $\alpha \approx 25{,}1°$. **Contrôle** : au limon, chaque marche a une profondeur de $\frac{6{,}912}{18} \approx 38{,}4$ cm pour 18 cm de hauteur, et $\frac{18}{38{,}4} \approx 0{,}469$: on retrouve la même tangente.

Réponse. Limon ≈ 7,63 m par tour, avec une pente de ≈ 25,11°.

Correction de l'exercice 12 – Ombre d'un bâtiment

L'immeuble, son ombre et un rayon de soleil forment un triangle rectangle ; la hauteur du soleil est l'angle au bout de l'ombre. L'immeuble lui est opposé, l'ombre adjacente, donc ombre $= \frac{24}{\tan\alpha}$:

$$\frac{24}{\tan 20°} \approx 65{,}9 \text{ m} \qquad \frac{24}{\tan 40°} \approx 28{,}6 \text{ m} \qquad \frac{24}{\tan 60°} \approx 13{,}9 \text{ m}$$

L'ombre n'est pas inversement proportionnelle à l'angle : en doublant l'angle de 20° à 40°, elle est divisée par 2,3, pas par 2. Elle est égale à la hauteur pour 45°, car $\tan 45° = 1$, devient très longue quand le soleil est bas et très courte quand il est haut.

Réponse. ≈ 65,94 m à 20°, ≈ 28,60 m à 40°, ≈ 13,86 m à 60° — l'ombre varie comme $\frac{1}{\tan\alpha}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 13 – Pente d’un toit et longueur de chevron

Une pente de 22 % signifie 22 cm de montée pour 100 cm à l’horizontale. Sur 7,20 m, le toit monte de $7{,}20 \times 0{,}22 = 1{,}584$ m. L’angle vérifie $\tan\alpha = 0{,}22$, d’où $\alpha \approx 12{,}4°$. Le chevron est l’hypoténuse du triangle formé :

$$\ell = \sqrt{7{,}20^2 + 1{,}584^2} = \sqrt{54{,}349} \approx 7{,}37 \text{ m}$$

Contrôle avec le cosinus : $\dfrac{7{,}20}{\cos 12{,}41°} \approx 7{,}37$ m. Pour une pente modérée, le chevron ne dépasse la largeur que de 2,4 %.

Réponse. Hauteur 1,584 m, angle ≈ 12,41°, chevron ≈ 7,37 m.

Correction de l’exercice 14 – Deux visées depuis un bateau

Pour chaque position, le phare (60 m) est le côté opposé à l’angle d’élévation, et la distance au phare le côté adjacent :

$$d_1 = \frac{60}{\tan 4°} \approx 858{,}4 \text{ m} \qquad d_2 = \frac{60}{\tan 9°} \approx 378{,}8 \text{ m}$$

Le bateau s’est rapproché, donc il a parcouru $d_1 - d_2 \approx 858{,}4 - 378{,}8 = 479{,}6$ m.
Contrôle : l’angle augmente quand on s’approche, d’où $d_2 < d_1$. Ces mesures sont peu précises : avec 5° au lieu de 4°, la première distance tomberait à environ 686 m. Aux petits angles, une petite erreur de mesure change beaucoup le résultat.

Réponse. $858{,}4 - 378{,}8 \approx 479{,}6$ m parcourus.

Correction de l’exercice 15 – Angle de champ d’un objectif

On coupe le schéma en deux par l’axe de l’objectif : le demi-capteur (18 mm) et la focale (50 mm) sont les côtés d’un triangle rectangle, et le demi-angle de champ est l’angle opposé au demi-capteur.

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{18}{50} = 0{,}36 \quad \text{donc} \quad \frac{\theta}{2} \approx 19{,}8° \quad \text{et} \quad \theta \approx 39{,}6°$$

À 10 m, le même demi-angle donne une demi-largeur de $10 \times 0{,}36 = 3{,}60$ m : la scène cadrée mesure 7,20 m de large. **Contrôle** par proportionnalité (triangles semblables) : $\dfrac{36}{50} = \dfrac{7{,}20}{10} = 0{,}72$.

Réponse. $\theta \approx 39{,}60°$ et une largeur cadrée de 7,20 m à 10 m.

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : aménagement d’un terrain en pente

a) Une pente de 15 % sur 30 m horizontaux donne un dénivelé de $30 \times 0{,}15 = 4{,}50$ m, et l’angle vérifie $\tan\alpha = 0{,}15$, d’où $\alpha \approx 8{,}5°$.

b) Le long de la pente, le terrain mesure $\sqrt{30^2 + 4{,}50^2} = \sqrt{920{,}25} \approx 30{,}34$ m, d’où une surface réelle

$$30{,}336 \times 20 \approx 606{,}7 \text{ m}^2$$

à peine plus que les 600 m² mesurés à plat.

c) Sur toute la largeur de 20 m, une terrasse de 30 m² a une longueur de $\dfrac{30}{20} = 1{,}50$ m. Le terrain naturel y descend de $1{,}50 \times 0{,}15 = 0{,}225$ m. En plaçant la terrasse à l’altitude moyenne (le déblai compense le remblai), le mur aval rattrape la moitié de cette différence, soit 0,1125 m, environ 11 cm.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Le dénivelé de 450 cm demande $\frac{450}{17} \approx 26{,}5$ marches, donc 27 marches de $\frac{450}{27} \approx 16{,}7$ cm. Leur emprise horizontale vaut $27 \times 0{,}30 = 8{,}10$ m. **Contrôle** : la pente de l'escalier, $\tan\beta = \frac{4{,}50}{8{,}10} \approx 0{,}556$, soit 29°, est bien plus forte que celle du terrain : l'escalier doit être placé en travers de la pente ou coupé de paliers.

Réponse. a) 4,50 m et $\alpha \approx 8{,}53°$ · b) $\approx 606{,}72$ m² · c) 1,50 m de long, mur de ≈ 11 cm · d) 27 marches et 8,10 m d'emprise.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).