Plaquette 4 – Trigonométrie et figures : quadrilatères, cercles et espace

Trigonométrie (triangle rectangle) — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le réflexe du découpage. Une figure quelconque se ramène à des triangles rectangles en traçant une **hauteur** ou une **diagonale**.

Figure	Découpage utile
triangle isocèle	la hauteur issue du sommet principal
triangle équilatéral	une hauteur
losange	les deux diagonales
trapèze rectangle	un rectangle et un triangle rectangle
trapèze isocèle	un rectangle et deux triangles rectangles égaux
parallélogramme	une hauteur abaissée d'un sommet

Cordes et angles au centre. Dans un cercle de rayon R, une corde de longueur c sous-tend un angle au centre θ tel que

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{c}{2R} \qquad \text{donc} \qquad c = 2R\sin\frac{\theta}{2}$$

La distance du centre à la corde vaut $R\cos\dfrac{\theta}{2}$, et la demi-corde, la distance et le rayon forment un triangle rectangle.

Polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon R.

Grandeur	Expression
angle au centre	$\dfrac{360°}{n}$
côté	$2R\sin\dfrac{180°}{n}$
apothème	$R\cos\dfrac{180°}{n}$
aire	$\dfrac{n}{2}R^2\sin\dfrac{360°}{n}$

Dans l'espace. On travaille dans un **plan** bien choisi de la figure : plan contenant l'axe pour un cône, plan diagonal pour un pavé, plan de symétrie pour une pyramide.

Deux contrôles indispensables.

— La somme des angles d'un triangle vaut 180° — on vérifie toujours.
— Le côté opposé au plus grand angle est le plus grand — sinon, c'est une erreur.

Correction de l'exercice 1 – Parallélogramme et hauteur

On abaisse la hauteur issue de l'extrémité du côté de 9 cm sur le côté de 14 cm. Le triangle rectangle obtenu a pour hypoténuse le côté de 9 cm, et la hauteur est opposée à l'angle de 52° :

$$h = 9 \times \sin 52° \approx 9 \times 0{,}7880 \approx 7{,}09 \text{ cm}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

L'aire d'un parallélogramme vaut base fois hauteur : $A \approx 14 \times 7{,}092 \approx 99{,}3$ cm².
Contrôle : la hauteur est plus petite que le côté oblique de 9 cm, comme il se doit, puisque c'est un côté de l'angle droit et non l'hypoténuse.

Réponse. Hauteur ≈ 7,09 cm et aire ≈ 99,29 cm².

Correction de l'exercice 2 – Trapèze isocèle

En traçant les deux hauteurs issues des extrémités de la petite base, on découpe le trapèze en un rectangle et deux triangles rectangles égaux (le trapèze est isocèle). Chacun a pour base $\dfrac{20-12}{2} = 4$ cm et pour angle 65°.

La hauteur est opposée à l'angle, le côté oblique est l'hypoténuse :

$$h = 4 \times \tan 65° \approx 8{,}58 \text{ cm} \qquad \ell = \frac{4}{\cos 65°} \approx 9{,}47 \text{ cm}$$

L'aire vaut $\dfrac{(20+12)\times h}{2} \approx 16 \times 8{,}578 \approx 137{,}2$ cm². **Contrôle** par Pythagore dans un triangle : $4^2 + 8{,}578^2 \approx 16 + 73{,}58 = 89{,}58 \approx 9{,}465^2$.

Réponse. Hauteur ≈ 8,58 cm, côtés obliques ≈ 9,47 cm, aire ≈ 137,25 cm².

Correction de l'exercice 3 – Corde et angle au centre

Le triangle formé par le centre O et les extrémités de la corde est isocèle, de côtés 10, 10 et 16 cm. La perpendiculaire issue de O coupe la corde en son milieu H : on obtient un triangle rectangle d'hypoténuse 10 et de côté $HA = 8$ cm.

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{8}{10} = 0{,}8 \quad \text{donc} \quad \frac{\theta}{2} \approx 53{,}1° \quad \text{et} \quad \theta \approx 106{,}3°$$

La distance au centre est $OH = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ cm. **Contrôle** avec le cosinus : $10 \times \cos 53{,}13° \approx 6$ cm. On reconnaît le triangle 6, 8, 10.

Réponse. $\theta \approx 106{,}26°$ et une distance au centre de 6 cm.

Correction de l'exercice 4 – Hexagone régulier

L'hexagone régulier se découpe, à partir du centre, en 6 triangles isocèles dont l'angle au centre vaut $\dfrac{360°}{6} = 60°$. Un triangle isocèle avec un angle de 60° a ses deux autres angles égaux à 60° : il est équilatéral. Le côté de l'hexagone est donc égal au rayon, 8 cm.

L'apothème est la hauteur d'un de ces triangles équilatéraux :
$a = 8 \times \sin 60° = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93$ cm. L'aire vaut six fois celle d'un triangle :

$$A = 6 \times \frac{8 \times 4\sqrt{3}}{2} = 96\sqrt{3} \approx 166{,}3 \text{ cm}^2$$

Contrôle : l'hexagone est à l'intérieur du disque, d'aire $64\pi \approx 201{,}1$ cm², et il en occupe environ 83 %.

Réponse. Côté 8 cm (égal au rayon), apothème $4\sqrt{3} \approx 6{,}93$ cm, aire $96\sqrt{3} \approx 166{,}28$ cm².

Correction de l'exercice 5 – Pentagone régulier

On découpe le pentagone en 5 triangles isocèles de sommet le centre, d'angle au centre $\dfrac{360°}{5} = 72°$. La hauteur de chacun le partage en deux triangles rectangles d'angle 36°, d'hypoténuse le rayon R et de côté opposé le demi-côté, 3 cm :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$R = \frac{3}{\sin 36°} \approx \frac{3}{0{,}5878} \approx 5{,}10 \text{ cm}$$

L'apothème est le côté adjacent : $a = \frac{3}{\tan 36°} \approx 4{,}13$ cm. L'aire vaut $5 \times \frac{6 \times 4{,}129}{2} \approx 61{,}9$ cm². **Contrôle** par Pythagore : $3^2 + 4{,}129^2 \approx 9 + 17{,}05 = 26{,}05 \approx 5{,}104^2$.

Réponse. $R \approx 5{,}10$ cm, apothème $\approx 4{,}13$ cm, aire $\approx 61{,}94$ cm².

Correction de l'exercice 6 – Angle d'une pyramide

Pour l'angle d'une face avec la base, on se place dans le plan vertical qui passe par le sommet et par les milieux de deux côtés opposés de la base. On y voit un triangle rectangle de côtés : la hauteur (10 cm) et la distance du centre au milieu d'un côté (7 cm).

$$\tan \alpha = \frac{10}{7} \approx 1{,}429 \quad \text{donc} \quad \alpha \approx 55{,}0°$$

Pour l'angle d'une arête latérale, on se place dans le plan diagonal : le pied de l'arête est à une demi-diagonale du centre, soit $7\sqrt{2} \approx 9{,}90$ cm. Alors $\tan \beta = \frac{10}{9{,}899} \approx 1{,}010$ et $\beta \approx 45{,}3°$. **Contrôle** : un sommet de la base est plus loin du centre que le milieu d'un côté, donc l'arête est moins inclinée que la face, et l'on a bien $\beta < \alpha$.

Réponse. Face : $\alpha \approx 55{,}01°$ · arête : $\beta \approx 45{,}29°$.

Correction de l'exercice 7 – Cône et demi-angle au sommet

Dans un plan contenant l'axe du cône, la génératrice (25 cm), le rayon et la hauteur forment un triangle rectangle ; le demi-angle au sommet (22°) est l'angle entre la génératrice et la hauteur. Le rayon lui est opposé, la hauteur adjacente :

$$r = 25 \times \sin 22° \approx 9{,}37 \text{ cm} \qquad h = 25 \times \cos 22° \approx 23{,}18 \text{ cm}$$

Le volume vaut $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \approx \frac{1}{3} \times \pi \times 87{,}70 \times 23{,}18 \approx 2129$ cm³. **Contrôle** par Pythagore : $9{,}365^2 + 23{,}18^2 \approx 87{,}70 + 537{,}31 = 625{,}01 \approx 25^2$.

Réponse. $r \approx 9{,}37$ cm, $h \approx 23{,}18$ cm, $V \approx 2128{,}8$ cm³.

Correction de l'exercice 8 – Diagonale d'un pavé et angle

La diagonale de la face de 12 cm sur 9 cm mesure $\sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{225} = 15$ cm. La grande diagonale du pavé, l'arête verticale de 8 cm et cette diagonale de face forment un triangle rectangle (l'arête est perpendiculaire à la face) :

$$\text{grande diagonale} = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17 \text{ cm}$$

L'angle α entre la grande diagonale et la face est l'angle entre cette diagonale et sa projection sur la face, la diagonale de face. L'arête de 8 cm lui est opposée : $\sin \alpha = \frac{8}{17} \approx 0{,}471$, d'où $\alpha \approx 28{,}1°$. **Contrôle** avec la tangente : $\frac{8}{15} \approx 0{,}533$ redonne $28{,}1°$.

Réponse. $\sin \alpha = \frac{8}{17}$, soit $\alpha \approx 28{,}07°$.

Correction de l'exercice 9 – Losange à partir des diagonales

Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu : elles forment quatre triangles rectangles de côtés 12 cm et 5 cm, dont l'hypoténuse est un côté du losange.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$c = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

L'angle du losange situé à une extrémité de la grande diagonale est partagé en deux par celle-ci. Sa moitié vérifie tan = $\frac{5}{12}$, ce qui donne 22,6°, donc l'angle vaut environ 45,2° ; les deux autres angles valent $180° - 45{,}24° \approx 134{,}8°$, car deux angles consécutifs d'un losange sont supplémentaires. L'aire vaut $\frac{24 \times 10}{2} = 120$ cm². **Contrôle** : $2 \times 45{,}24 + 2 \times 134{,}76 = 360°$.

Réponse. Côté 13 cm, angles ≈ 45,24° et ≈ 134,76°, aire 120 cm².

Correction de l'exercice 10 – Tétraèdre et angle

La base est un triangle équilatéral de côté 12, de hauteur $6\sqrt{3}$. Son centre G est aux deux tiers de chaque hauteur depuis le sommet : il est à $4\sqrt{3} \approx 6{,}93$ cm des sommets et à $2\sqrt{3} \approx 3{,}46$ cm des côtés. La hauteur du tétraèdre, issue du sommet, tombe en G ; par Pythagore dans le triangle formé avec une arête,

$$H = \sqrt{12^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{144 - 48} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6} \approx 9{,}80 \text{ cm}$$

Pour l'angle d'une arête avec la base : $\cos\alpha = \frac{4\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, d'où $\alpha \approx 54{,}7°$. Pour l'angle d'une face avec la base, on utilise la hauteur d'une face latérale : son pied est au milieu d'un côté, à $2\sqrt{3}$ de G, et sa longueur est $6\sqrt{3}$. Donc $\cos\beta = \frac{2\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$ et $\beta \approx 70{,}5°$.

Contrôle : $\tan\beta = \frac{4\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$ redonne 70,5°.

Réponse. Arête : $\alpha \approx 54{,}74°$ ($\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$) · face : $\beta \approx 70{,}53°$ ($\cos\beta = \frac{1}{3}$).

Correction de l'exercice 11 – Deux cordes d'un cercle

Pour chaque corde, la perpendiculaire issue du centre coupe la corde en son milieu et forme un triangle rectangle d'hypoténuse 13 cm (un rayon). La corde de 24 cm est à la distance

$$\sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

du centre, et la corde de 10 cm à $\sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ cm. Les deux cordes étant parallèles, ces deux perpendiculaires sont portées par la même droite passant par le centre. Si les cordes sont de part et d'autre du centre, les distances s'ajoutent : $5 + 12 = 17$ cm. Si elles sont du même côté, elles se retranchent : $12 - 5 = 7$ cm. **Contrôle** : 17 cm est bien inférieur au diamètre, 26 cm.

Réponse. 17 cm si elles encadrent le centre, 7 cm si elles sont du même côté.

Correction de l'exercice 12 – Triangle quelconque découpé

On trace la hauteur issue du troisième sommet ; son pied partage le côté de 20 cm en deux longueurs x (côté de l'angle de 40°) et $20 - x$ (côté de l'angle de 65°). La hauteur h est opposée à chaque angle dans deux triangles rectangles :

$$x = \frac{h}{\tan 40°} \qquad 20 - x = \frac{h}{\tan 65°}$$

En additionnant, $h\left(\frac{1}{\tan 40°} + \frac{1}{\tan 65°}\right) = 20$, soit $h \times (1{,}1918 + 0{,}4663) \approx 20$ et $h \approx \frac{20}{1{,}6581} \approx 12{,}06$ cm. L'aire vaut $\frac{20 \times 12{,}062}{2} \approx 120{,}6$ cm². **Contrôle** : $x \approx 14{,}38$ cm et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$20 - x \approx 5{,}62$ cm, et $\dfrac{12{,}062}{5{,}624} \approx 2{,}145 \approx \tan 65°$.

Réponse. Hauteur ≈ 12,06 cm et aire ≈ 120,62 cm².

Correction de l'exercice 13 – Cerf-volant

L'angle droit est entre un côté de 30 cm et un côté de 50 cm. La grande diagonale joint les deux autres sommets : elle coupe le cerf-volant en deux triangles rectangles égaux, de côtés 30 et 50 cm, dont elle est l'hypoténuse.

$$d = \sqrt{30^2 + 50^2} = \sqrt{3400} = 10\sqrt{34} \approx 58{,}31 \text{ cm}$$

L'aire est la somme des aires des deux triangles : $2 \times \dfrac{30 \times 50}{2} = 1500$ cm². **Contrôle** : les angles aigus d'un triangle valent environ 59,0° et 31,0° ($\tan = \dfrac{50}{30}$ et $\dfrac{30}{50}$), et les quatre angles du cerf-volant $90° + 90° + 2 \times 59{,}04° + 2 \times 30{,}96° = 360°$.

Réponse. Grande diagonale $10\sqrt{34}$ ≈ 58,31 cm et aire 1500 cm².

Correction de l'exercice 14 – Angle de dépression du faisceau d'un phare

Le phare (45 m), la surface de la mer jusqu'au point éclairé (24 000 m) et le rayon forment un triangle rectangle. Au point éclairé, le rayon fait avec la mer le même angle que l'angle de dépression (angles alternes-internes) ; le phare est le côté opposé :

$$\tan \alpha = \frac{45}{24\,000} = 0{,}001\,875 \quad \text{donc} \quad \alpha \approx 0{,}107°$$

Un degré se divise en 60 minutes d'arc : $0{,}107 \times 60 \approx 6{,}4$ minutes. L'angle est minuscule, ce qui est logique pour un rayon presque horizontal. La longueur du rayon, $\sqrt{24\,000^2 + 45^2} \approx 24\,000{,}04$ m, ne dépasse la distance horizontale que de 4 cm. Pour de si petits angles, l'angle est presque proportionnel à la hauteur : un phare de 90 m donnerait environ 0,215°.

Réponse. $\tan \alpha = \dfrac{45}{24\,000}$, soit $\alpha \approx 0{,}107°$: environ 6 minutes d'arc.

Correction de l'exercice 15 – Triangle inscrit dans un demi-cercle

Un triangle inscrit dans un demi-cercle, dont un côté est le diamètre, est **rectangle** : l'hypoténuse est le diamètre, 26 cm. Par Pythagore, l'autre côté vaut

$$\sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{676 - 100} = \sqrt{576} = 24 \text{ cm}$$

L'angle opposé au côté de 10 cm vérifie $\sin \alpha = \dfrac{10}{26} \approx 0{,}385$, d'où $\alpha \approx 22{,}6°$, et l'autre angle aigu vaut $90° - 22{,}62° \approx 67{,}4°$. L'aire vaut $\dfrac{10 \times 24}{2} = 120$ cm². **Contrôle** : $\sin 67{,}38° \approx 0{,}923 \approx \dfrac{24}{26}$.

Réponse. Autre côté 24 cm, angles ≈ 22,62° et ≈ 67,38°, aire 120 cm².

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : une charpente

a) La hauteur du faîtage partage la ferme en deux triangles rectangles de base 4,80 m et d'angle 30°. La hauteur est opposée à l'angle, l'arbalétrier est l'hypoténuse :

$$h = 4{,}80 \times \tan 30° = 1{,}6\sqrt{3} \approx 2{,}77 \text{ m} \qquad \ell = \frac{4{,}80}{\cos 30°} = 3{,}2\sqrt{3} \approx 5{,}54 \text{ m}$$

b) Le milieu d'un arbalétrier est à mi-chemin entre le bas de la ferme et le faîtage : à 2,40

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

m du centre horizontalement et à $\frac{h}{2} \approx 1{,}386$ m de hauteur. La contre-fiche part du bas du poinçon, au centre de la base : elle mesure $\sqrt{2{,}40^2 + 1{,}386^2} \approx \sqrt{7{,}681} \approx 2{,}77$ m. Elle a la même longueur que le poinçon : c'est en effet la moitié de l'arbalétrier, $\frac{5{,}543}{2} \approx 2{,}77$ m, car dans un triangle rectangle le milieu de l'hypoténuse est à égale distance des trois sommets.

c) L'aire de la ferme vaut $\frac{9{,}60 \times 2{,}771}{2} \approx 13{,}30$ m².

d) Avec $h = 3{,}20$ m, $\tan\alpha = \frac{3{,}20}{4{,}80} = \frac{2}{3}$, d'où $\alpha \approx 33{,}7°$, et l'arbalétrier mesure $\sqrt{4{,}80^2 + 3{,}20^2} = \sqrt{33{,}28} \approx 5{,}77$ m. Il s'allonge de 4 % environ, tandis que l'aire passe à $\frac{9{,}60 \times 3{,}20}{2} = 15{,}36$ m², soit 15 % de plus.

Réponse. a) $h \approx 2{,}77$ m et arbalétriers $\approx 5{,}54$ m · b) contre-fiche $\approx 2{,}77$ m · c) $\approx 13{,}30$ m² · d) $\alpha \approx 33{,}69°$ et arbalétrier $\approx 5{,}77$ m.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).