

Plaquette 4 – Trigonométrie et figures : quadrilatères, cercles et espace

Trigonométrie (triangle rectangle) — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le réflexe du découpage. Une figure quelconque se ramène à des triangles rectangles en traçant une **hauteur** ou une **diagonale**.

Figure	Découpage utile
triangle isocèle	la hauteur issue du sommet principal
triangle équilatéral	une hauteur
losange	les deux diagonales
trapèze rectangle	un rectangle et un triangle rectangle
trapèze isocèle	un rectangle et deux triangles rectangles égaux
parallélogramme	une hauteur abaissée d'un sommet

Cordes et angles au centre. Dans un cercle de rayon R , une corde de longueur c sous-tend un angle au centre θ tel que

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{c}{2R} \quad \text{donc} \quad c = 2R \sin \frac{\theta}{2}$$

La distance du centre à la corde vaut $R \cos \frac{\theta}{2}$, et la demi-corde, la distance et le rayon forment un triangle rectangle.

Polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon R .

Grandeur	Expression
angle au centre	$\frac{360^\circ}{n}$
côté	$2R \sin \frac{180^\circ}{n}$
apothème	$R \cos \frac{180^\circ}{n}$
aire	$\frac{n}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$

Dans l'espace. On travaille dans un **plan** bien choisi de la figure : plan contenant l'axe pour un cône, plan diagonal pour un pavé, plan de symétrie pour une pyramide.

Deux contrôles indispensables.

- La somme des angles d'un triangle vaut 180° — on vérifie toujours.
- Le côté opposé au plus grand angle est le plus grand — sinon, c'est une erreur.

Correction de l'exercice 1 – Parallélogramme et hauteur

- **Découpage** : on abaisse la hauteur depuis un sommet ✓
- **Triangle rectangle obtenu** : hypoténuse 9 cm, angle 52° ✓
- **Hauteur** : $9 \times \sin 52^\circ$ ✓

— **Valeur** : $\sin 52^\circ \approx 0,7880$ ✓

— **Calcul** :

$$h \approx 9 \times 0,7880 \approx 7,092 \text{ cm}$$

— **Aire** : base $\times$ hauteur ✓

— **Calcul** :

$$A \approx 14 \times 7,092 \approx 99,29 \text{ cm}^2$$

— **Contrôle par la formule au sinus** : $9 \times 14 \times \sin 52^\circ \approx 126 \times 0,7880 \approx 99,29 \text{ cm}^2$ ✓

— **Cohérence** : les deux méthodes concordent ✓

— **Projection horizontale du côté de 9 cm** : $9 \times \cos 52^\circ \approx 5,540 \text{ cm}$ ✓

— **Contrôle par Pythagore** : $30,69 + 50,30 = 80,99$, et $9^2 = 81$ ✓

— **Grande diagonale** : par Pythagore dans le triangle rectangle de côtés $14 + 5,540$ et $7,092$ ✓

— **Calcul** : $\sqrt{381,80 + 50,30} \approx \sqrt{432,10} \approx 20,787 \text{ cm}$ ✓

— **Petite diagonale** : côtés $14 - 5,540$ et $7,092$ ✓

— **Calcul** : $\sqrt{71,57 + 50,30} \approx \sqrt{121,87} \approx 11,039 \text{ cm}$ ✓

— **Contrôle par la loi du parallélogramme** :

$$20,787^2 + 11,039^2 \approx 432,1 + 121,9 = 554,0 \text{ ✓}$$

— **Autre membre** : $2(81 + 196) = 554$ ✓

— **Périmètre** : $2(9 + 14) = 46 \text{ cm}$ ✓

Réponse. Hauteur $\approx 7,09 \text{ cm}$ et aire $\approx 99,29 \text{ cm}^2$.

Correction de l'exercice 2 - Trapèze isocèle

— **Découpage** : un rectangle central et deux triangles rectangles égaux ✓

— **Base de chaque triangle** : $\frac{20 - 12}{2} = 4 \text{ cm}$ ✓

— **Hauteur** : $\tan 65^\circ = \frac{h}{4}$ ✓

— **Valeur** : $\tan 65^\circ \approx 2,1445$ ✓

— **Calcul** :

$$h \approx 4 \times 2,1445 \approx 8,578 \text{ cm}$$

— **Côté oblique** : $\frac{4}{\cos 65^\circ}$ ✓

— **Valeur** : $\cos 65^\circ \approx 0,4226$ ✓

— **Calcul** :

$$\ell \approx \frac{4}{0,4226} \approx 9,465 \text{ cm}$$

— **Contrôle par Pythagore** : $16 + 73,58 = 89,58$, et $9,465^2 \approx 89,59$ ✓

— **Aire** : $\frac{(20 + 12) \times h}{2}$ ✓

— **Calcul** :

$$A \approx \frac{32 \times 8,578}{2} \approx 137,25 \text{ cm}^2$$

— **Contrôle par découpage** : rectangle $12 \times 8,578 \approx 102,94 \text{ cm}^2$ ✓

— **Deux triangles** : $2 \times \frac{4 \times 8,578}{2} \approx 34,31 \text{ cm}^2$ ✓

— **Somme** : $\approx 137,25 \text{ cm}^2$ ✓

— **Périmètre** : $20 + 12 + 2 \times 9,465 \approx 50,93 \text{ cm}$ ✓

— **Angles à la petite base** : $180 - 65 = 115^\circ$ ✓

— **Contrôle** : $2 \times 65 + 2 \times 115 = 360^\circ$ ✓

Réponse. Hauteur $\approx 8,58$ cm, côtés obliques $\approx 9,47$ cm, aire $\approx 137,25$ cm².

Correction de l'exercice 3 - Corde et angle au centre

— **Demi-corde** : 8 cm ✓

— **Triangle rectangle** : rayon, demi-corde, distance au centre ✓

— **Relation** : $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{8}{10} = 0,8$ ✓

— **Demi-angle** : $\frac{\theta}{2} \approx 53,13^\circ$ ✓

— **Angle au centre** :

$$\theta \approx 106,26^\circ$$

— **Distance au centre** : $10 \times \cos 53,13^\circ$ ✓

— **Valeur** : $\cos 53,13^\circ \approx 0,6$ ✓

— **Calcul** :

$$d \approx 6 \text{ cm}$$

— **Contrôle par Pythagore** : $64 + 36 = 100 = 10^2$ ✓

— **Triplet reconnaissable** : 6-8-10 ✓

— **Contrôle de vraisemblance** : $\theta > 90^\circ$, la corde est plus longue que le côté du carré inscrit ✓

— **Côté du carré inscrit** : $10\sqrt{2} \approx 14,142$ cm ✓

— **Vérification** : $16 > 14,142$ ✓

— **Longueur de l'arc correspondant** : $\frac{106,26}{360} \times 2\pi \times 10 \approx 18,55$ cm ✓

— **Comparaison** : $18,55 > 16$, l'arc est bien plus long que la corde ✓

— **Aire du secteur circulaire** : $\frac{106,26}{360} \times \pi \times 100 \approx 92,73$ cm² ✓

— **Aire du triangle central** : $\frac{16 \times 6}{2} = 48$ cm² ✓

— **Aire du segment circulaire** : $92,73 - 48 = 44,73$ cm² ✓

Réponse. $\theta \approx 106,26^\circ$ et une distance au centre de 6 cm.

Correction de l'exercice 4 - Hexagone régulier

— **Angle au centre** : $\frac{360}{6} = 60^\circ$ ✓

— **Côté** : $2R \sin 30^\circ = 2 \times 8 \times 0,5$ ✓

— **Résultat** :

$$c = 8 \text{ cm}$$

— **Propriété remarquable** : le côté de l'hexagone régulier **égale** le rayon ✓

— **Explication** : chaque triangle central est **équilatéral** ✓

— **Apothème** : $R \cos 30^\circ = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓

— **Résultat** :

$$a = 4\sqrt{3} \approx 6,928 \text{ cm}$$

— **Contrôle par Pythagore** : $16 + 48 = 64 = 8^2$ ✓

— **Aire par la formule** : $\frac{6}{2} \times 64 \times \sin 60^\circ$ ✓

- **Calcul** : $3 \times 64 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 96\sqrt{3} \approx 166,277 \text{ cm}^2 \checkmark$
- **Contrôle par les six triangles équilatéraux** : $6 \times \frac{64\sqrt{3}}{4} = 96\sqrt{3} \checkmark$
- **Cohérence** : les deux méthodes concordent $\checkmark$
- **Contrôle par périmètre et apothème** : $\frac{48 \times 4\sqrt{3}}{2} = 96\sqrt{3} \checkmark$
- **Périmètre** : 48 cm $\checkmark$
- **Aire du disque** : $64\pi \approx 201,062 \text{ cm}^2 \checkmark$
- **Proportion occupée** : $\frac{166,277}{201,062} \approx 82,7\% \checkmark$
- **Valeur exacte** : $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0,827 \checkmark$
- **Comparaison au carré inscrit** : il occuperait $\frac{2}{\pi} \approx 63,66\% \checkmark$

Réponse. Côté 8 cm (égal au rayon), apothème $4\sqrt{3} \approx 6,93 \text{ cm}$, aire $96\sqrt{3} \approx 166,28 \text{ cm}^2$.

Correction de l'exercice 5 - Pentagone régulier

- **Angle au centre** : $\frac{360}{5} = 72^\circ \checkmark$
- **Demi-angle** : $36^\circ \checkmark$
- **Relation** : $c = 2R \sin 36^\circ \checkmark$
- **Valeur** : $\sin 36^\circ \approx 0,5878 \checkmark$
- **Rayon** :

$$R = \frac{6}{2 \times 0,5878} \approx 5,104 \text{ cm}$$

- **Apothème** : $R \cos 36^\circ \checkmark$
- **Valeur** : $\cos 36^\circ \approx 0,8090 \checkmark$
- **Calcul** :

$$a \approx 5,104 \times 0,8090 \approx 4,129 \text{ cm}$$

- **Contrôle par Pythagore** : $9 + 17,05 = 26,05$, et $5,104^2 \approx 26,05 \checkmark$
- **Aire par périmètre et apothème** : $\frac{P \times a}{2} \checkmark$
- **Périmètre** : 30 cm $\checkmark$
- **Calcul** :

$$A \approx \frac{30 \times 4,129}{2} \approx 61,94 \text{ cm}^2$$

- **Contrôle par la formule** : $\frac{5}{2} \times 26,05 \times \sin 72^\circ \approx 65,13 \times 0,9511 \approx 61,94 \text{ cm}^2 \checkmark$
- **Cohérence** : les deux méthodes concordent $\checkmark$
- **Contrôle par les cinq triangles** : $5 \times \frac{6 \times 4,129}{2} \approx 61,94 \text{ cm}^2 \checkmark$
- **Aire du disque circonscrit** : $\pi \times 26,05 \approx 81,84 \text{ cm}^2 \checkmark$
- **Proportion occupée** : $\approx 75,7\% \checkmark$
- **Comparaison** : moins que l'hexagone (82,7 %) et plus que le carré (63,7 %) $\checkmark$

Réponse. $R \approx 5,10 \text{ cm}$, apothème $\approx 4,13 \text{ cm}$, aire $\approx 61,94 \text{ cm}^2$.

Correction de l'exercice 6 - Angle d'une pyramide

- **Pour l'angle d'une face** : on travaille dans le plan de symétrie passant par les milieux de deux côtés opposés ✓
- **Triangle rectangle** : hauteur 10, demi-côté 7, apothème ✓
- **Relation** : $\tan \alpha = \frac{10}{7}$ ✓
- **Valeur** : $\approx 1,4286$ ✓
- **Angle d'une face avec la base** :

$$\alpha \approx 55,01^\circ$$
- **Apothème** : $\sqrt{100 + 49} = \sqrt{149} \approx 12,207$ cm ✓
- **Pour l'angle d'une arête** : on travaille dans le plan diagonal ✓
- **Demi-diagonale** : $7\sqrt{2} \approx 9,899$ cm ✓
- **Relation** : $\tan \beta = \frac{10}{9,899}$ ✓
- **Valeur** : $\approx 1,0102$ ✓
- **Angle d'une arête avec la base** :

$$\beta \approx 45,29^\circ$$
- **Arête latérale** : $\sqrt{100 + 98} = \sqrt{198} \approx 14,071$ cm ✓
- **Comparaison des deux angles** : $\beta < \alpha$ ✓
- **Explication** : le sommet du carré est plus loin du centre que le milieu d'un côté ✓
- **Contrôle** : $9,899 > 7$ ✓
- **Aire latérale** : $4 \times \frac{14 \times 12,207}{2} \approx 341,78$ cm² ✓
- **Volume** : $\frac{196 \times 10}{3} \approx 653,33$ cm³ ✓
- **Contrôle du cosinus de α** : $\frac{7}{12,207} \approx 0,5735$, et $\arccos(0,5735) \approx 55,01^\circ$ ✓

Réponse. Face : $\alpha \approx 55,01^\circ$ · arête : $\beta \approx 45,29^\circ$.

Correction de l'exercice 7 - Cône et demi-angle au sommet

- **Plan de travail** : le plan contenant l'axe ✓
- **Triangle rectangle** : génératrice (hypoténuse), rayon, hauteur ✓
- **Rayon** : $25 \times \sin 22^\circ$ ✓
- **Valeur** : $\sin 22^\circ \approx 0,3746$ ✓
- **Calcul** :

$$r \approx 9,365$$
 cm
- **Hauteur** : $25 \times \cos 22^\circ$ ✓
- **Valeur** : $\cos 22^\circ \approx 0,9272$ ✓
- **Calcul** :

$$h \approx 23,180$$
 cm
- **Contrôle par Pythagore** : $87,70 + 537,31 = 625,01$, et $25^2 = 625$ ✓
- **Volume** :

$$V = \frac{\pi \times 87,70 \times 23,180}{3} \approx 2128,8$$
 cm³
- **Aire de base** : $\pi \times 87,70 \approx 275,52$ cm² ✓

- **Aire latérale** : $\pi \times 9,365 \times 25 \approx 735,53 \text{ cm}^2 \checkmark$
- **Aire totale** : $\approx 1011,05 \text{ cm}^2 \checkmark$
- **Contrôle du rapport** : $\frac{735,53}{275,52} \approx 2,670 \checkmark$
- **Valeur attendue** : $\frac{g}{r} = \frac{25}{9,365} \approx 2,670 \checkmark$
- **Angle au sommet total** : $44^\circ \checkmark$
- **Contrôle de vraisemblance** : le cône est **élancé**, sa hauteur dépassant deux fois son rayon $\checkmark$
- **Contrôle** : $\frac{23,180}{9,365} \approx 2,475 \checkmark$

Réponse. $r \approx 9,37 \text{ cm}$, $h \approx 23,18 \text{ cm}$, $V \approx 2128,8 \text{ cm}^3$.

Correction de l'exercice 8 - Diagonale d'un pavé et angle

- **Diagonale de la face** 12×9 : $\sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15 \text{ cm} \checkmark$
- **Grande diagonale** : $\sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17 \text{ cm} \checkmark$
- **Triplets emboîtés** : 9-12-15 puis 8-15-17 $\checkmark$
- **Triangle rectangle utile** : diagonale de face (15), arête (8), grande diagonale (17) $\checkmark$
- **Angle avec la face** : son sinus vaut $\frac{8}{17} \checkmark$
- **Valeur** : $\approx 0,4706 \checkmark$
- **Mesure** :

$$\alpha \approx 28,07^\circ$$

- **Contrôle par la tangente** : $\frac{8}{15} \approx 0,5333 \checkmark$
- **Vérification** : $\arctan(0,5333) \approx 28,07^\circ \checkmark$
- **Contrôle par le cosinus** : $\frac{15}{17} \approx 0,8824 \checkmark$
- **Vérification** : $\arccos(0,8824) \approx 28,07^\circ \checkmark$
- **Angle avec l'arête de 8 cm** : le complémentaire, $\approx 61,93^\circ \checkmark$
- **Contrôle** : $28,07 + 61,93 = 90^\circ \checkmark$
- **Angle avec la face** 12×8 : diagonale de face $\sqrt{144 + 64} = \sqrt{208} \approx 14,422 \text{ cm} \checkmark$
- **Sinus** : $\frac{9}{17} \approx 0,5294$, soit $\approx 31,97^\circ \checkmark$
- **Angle avec la face** 9×8 : diagonale $\sqrt{81 + 64} = \sqrt{145} \approx 12,042 \text{ cm} \checkmark$
- **Sinus** : $\frac{12}{17} \approx 0,7059$, soit $\approx 44,90^\circ \checkmark$
- **Règle** : l'angle est le plus grand avec la **plus petite** face $\checkmark$

Réponse. $\sin \alpha = \frac{8}{17}$, soit $\alpha \approx 28,07^\circ$.

Correction de l'exercice 9 - Losange à partir des diagonales

- **Demi-diagonales** : 12 cm et 5 cm $\checkmark$
- **Triangle rectangle formé** : côtés 12 et 5 $\checkmark$
- **Côté du losange** : l'hypoténuse $\checkmark$
- **Pythagore** :

$$c = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

- **Triplet reconnaissable** : 5-12-13 $\checkmark$

— **Demi-angle du sommet de la grande diagonale** : $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{12} \checkmark$

— **Valeur** : $\approx 0,4167$, soit $\frac{\alpha}{2} \approx 22,62^\circ \checkmark$

— **Angle** :

$$\alpha \approx 45,24^\circ$$

— **Autre angle** : $180 - 45,24 = 134,76^\circ \checkmark$

— **Contrôle** : $2 \times 45,24 + 2 \times 134,76 = 360^\circ \checkmark$

— **Aire par les diagonales** :

$$A = \frac{24 \times 10}{2} = 120 \text{ cm}^2$$

— **Contrôle par côté et sinus** : $13 \times 13 \times \sin 45,24^\circ \approx 169 \times 0,7101 \approx 120,0 \text{ cm}^2 \checkmark$

— **Cohérence** : les deux méthodes concordent $\checkmark$

— **Périmètre** : $52 \text{ cm} \checkmark$

— **Hauteur du losange** : $\frac{120}{13} \approx 9,231 \text{ cm} \checkmark$

— **Contrôle** : $13 \times \sin 45,24^\circ \approx 9,231 \text{ cm} \checkmark$

— **Rayon du cercle inscrit** : la moitié de la hauteur, soit $\approx 4,615 \text{ cm} \checkmark$

Réponse. Côté 13 cm , angles $\approx 45,24^\circ$ et $\approx 134,76^\circ$, aire 120 cm^2 .

Correction de l'exercice 10 - Tétraèdre et angle

— **Hauteur d'une face** : $\frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \approx 10,392 \text{ cm} \checkmark$

— **Distance du centre de la base à un sommet** : les deux tiers de cette hauteur $\checkmark$

— **Calcul** : $\frac{2}{3} \times 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \approx 6,928 \text{ cm} \checkmark$

— **Distance du centre à un côté** : le tiers, soit $2\sqrt{3} \approx 3,464 \text{ cm} \checkmark$

— **Hauteur du tétraèdre** : $\sqrt{144 - 48} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6} \approx 9,798 \text{ cm} \checkmark$

— **Angle d'une arête avec la base** : $\cos \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,5774 \checkmark$

— **Mesure** :

$$\alpha \approx 54,74^\circ$$

— **Contrôle par la tangente** : $\frac{4\sqrt{6}}{4\sqrt{3}} = \sqrt{2} \approx 1,4142 \checkmark$

— **Vérification** : $\arctan(1,4142) \approx 54,74^\circ \checkmark$

— **Angle d'une face avec la base** : $\tan \beta = \frac{4\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} \checkmark$

— **Simplification** : $2\sqrt{2} \approx 2,8284 \checkmark$

— **Mesure** :

$$\beta \approx 70,53^\circ$$

— **Contrôle du cosinus** : $\cos \beta = \frac{1}{3} \approx 0,3333 \checkmark$

— **Vérification** : $\arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70,53^\circ \checkmark$

— **Comparaison** : $\alpha < \beta$, la face est plus redressée que l'arête $\checkmark$

— **Fait remarquable** : l'angle dièdre du tétraèdre régulier vaut $\approx 70,53^\circ$, indépendamment de l'arête $\checkmark$

— **Coïncidence** : $\beta = 2 \times 35,26^\circ$, le complémentaire de $\alpha \checkmark$

Réponse. Arête : $\alpha \approx 54,74^\circ$ ($\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$) · face : $\beta \approx 70,53^\circ$ ($\cos \beta = \frac{1}{3}$).

Correction de l'exercice 11 - Deux cordes d'un cercle

- **Première corde** : demi-corde 12 cm ✓
- **Distance au centre** : $\sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$ cm ✓
- **Seconde corde** : demi-corde 5 cm ✓
- **Distance au centre** : $\sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$ cm ✓
- **Triplets** : 5-12-13 dans les deux cas, avec les rôles échangés ✓
- **Cordes de part et d'autre du centre** : les distances s'**additionnent** ✓
- **Calcul** :

$$5 + 12 = 17 \text{ cm}$$
- **Cordes du même côté** : les distances se **soustraient** ✓
- **Calcul** :

$$12 - 5 = 7 \text{ cm}$$
- **Contrôle de vraisemblance** : $17 < 26$, le diamètre ✓
- **Contrôle** : $7 < 17$ ✓
- **Angles au centre** : $2 \arcsin \frac{12}{13} \approx 2 \times 67,38 = 134,76^\circ$ ✓
- **Puis** : $2 \arcsin \frac{5}{13} \approx 2 \times 22,62 = 45,24^\circ$ ✓
- **Somme** : 180° ✓
- **Interprétation** : les deux cordes sont **perpendiculaires** aux mêmes rayons... plus simplement, leurs angles au centre sont supplémentaires ✓
- **Aire du trapèze formé (cordes opposées)** : $\frac{(24 + 10) \times 17}{2} = 289 \text{ cm}^2$ ✓
- **Aire du trapèze (même côté)** : $\frac{34 \times 7}{2} = 119 \text{ cm}^2$ ✓
- **Rapport** : $\frac{289}{119} \approx 2,429$ ✓

Réponse. 17 cm si elles encadrent le centre, 7 cm si elles sont du même côté.

Correction de l'exercice 12 - Triangle quelconque découpé

- **Notation** : h la hauteur, x la distance du pied au sommet de l'angle de 40° ✓
- **Premier triangle rectangle** : $\tan 40^\circ = \frac{h}{x}$, donc $x = \frac{h}{\tan 40^\circ}$ ✓
- **Second** : $\tan 65^\circ = \frac{h}{20 - x}$, donc $20 - x = \frac{h}{\tan 65^\circ}$ ✓
- **Somme** : $\frac{h}{\tan 40^\circ} + \frac{h}{\tan 65^\circ} = 20$ ✓
- **Valeurs** : $\tan 40^\circ \approx 0,8391$ et $\tan 65^\circ \approx 2,1445$ ✓
- **Inverses** : $\approx 1,1918$ et $\approx 0,4663$ ✓
- **Somme des coefficients** : $\approx 1,6581$ ✓
- **Hauteur** :

$$h \approx \frac{20}{1,6581} \approx 12,062 \text{ cm}$$

- **Aire** :

$$A \approx \frac{20 \times 12,062}{2} \approx 120,62 \text{ cm}^2$$

- **Position du pied** : $x \approx 12,062 \times 1,1918 \approx 14,376$ cm ✓
- **Contrôle** : $20 - 14,376 = 5,624$ cm ✓
- **Contrôle du second angle** : $\arctan \frac{12,062}{5,624} \approx 65,00^\circ$ ✓
- **Troisième angle du triangle** : $180 - 40 - 65 = 75^\circ$ ✓
- **Longueur du côté opposé à 40°** : $\frac{h}{\sin 65^\circ} \approx \frac{12,062}{0,9063} \approx 13,309$ cm ✓
- **Longueur du côté opposé à 65°** : $\frac{h}{\sin 40^\circ} \approx \frac{12,062}{0,6428} \approx 18,765$ cm ✓
- **Contrôle de l'ordre** : le plus grand côté (20) est opposé au plus grand angle (75°) ✓
- **Périmètre** : $\approx 52,07$ cm ✓

Réponse. Hauteur $\approx 12,06$ cm et aire $\approx 120,62$ cm².

Correction de l'exercice 13 - Cerf-volant

- **Structure** : deux triangles rectangles égaux, accolés par leur hypoténuse ✓
- **Chaque triangle** : côtés de l'angle droit 30 et 50 cm ✓
- **Hypoténuse commune** : c'est la grande diagonale ✓
- **Pythagore** :

$$d = \sqrt{900 + 2500} = \sqrt{3400} = 10\sqrt{34} \approx 58,310 \text{ cm}$$

- **Aire d'un triangle** : $\frac{30 \times 50}{2} = 750$ cm² ✓

- **Aire du cerf-volant** :

$$A = 2 \times 750 = 1500 \text{ cm}^2$$

- **Angle au sommet des côtés de 30** : $2 \arctan \frac{50}{30}$ ✓
- **Valeur** : $\arctan(1,6667) \approx 59,04^\circ$ ✓
- **Angle** : $\approx 118,07^\circ$ ✓
- **Angle au sommet des côtés de 50** : $2 \arctan \frac{30}{50}$ ✓
- **Valeur** : $\arctan(0,6) \approx 30,96^\circ$ ✓
- **Angle** : $\approx 61,93^\circ$ ✓
- **Somme des quatre angles** : $118,07 + 61,93 + 90 + 90 = 360^\circ$ ✓
- **Petite diagonale** : elle joint les deux sommets droits ✓
- **Sa longueur** : $2 \times \frac{2 \times 750}{58,310} \approx 2 \times 25,725 \approx 51,45$ cm ✓
- **Contrôle de l'aire par les diagonales** : $\frac{58,310 \times 51,45}{2} \approx 1500,0$ cm² ✓
- **Cohérence** : les diagonales d'un cerf-volant étant perpendiculaires, cette formule s'applique ✓
- **Périmètre** : $2(30 + 50) = 160$ cm ✓

Réponse. Grande diagonale $10\sqrt{34} \approx 58,31$ cm et aire 1500 cm².

Correction de l'exercice 14 - Angle solide d'un phare

- **Schéma** : triangle rectangle, hauteur 45 m et base 24 000 m ✓
- **Relation** : $\tan \alpha = \frac{45}{24\,000}$ ✓
- **Valeur** : $\approx 0,001875$ ✓
- **Angle** :

$$\alpha \approx 0,107^\circ$$

- **Conversion en minutes d'arc** : $0,107 \times 60 \approx 6,4'$ ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : l'angle est **très** faible, ce qui est logique pour un faisceau quasi horizontal ✓
- **Distance de visée** : $\sqrt{24\,000^2 + 45^2} \approx 24\,000,04$ m ✓
- **Écart avec l'horizontale** : 4 cm sur 24 km ✓
- **Conclusion** : la distance de visée et la distance horizontale sont **indiscernables** ✓
- **Approximation des petits angles** : $\tan \alpha \approx \alpha$ en radians ✓
- **Contrôle** : $0,001875 \text{ rad} = 0,001875 \times \frac{180}{\pi} \approx 0,1074^\circ$ ✓
- **Cohérence** : l'approximation est excellente ✓
- **Si le phare mesurait 90 m** : l'angle doublerait, à $\approx 0,215^\circ$ ✓
- **Cohérence** : pour les petits angles, l'angle est **proportionnel** à la hauteur ✓
- **Remarque physique** : la portée réelle dépend surtout de la **courbure** de la Terre ✓
- **Formule usuelle** : la portée en milles nautiques vaut environ $2,08\sqrt{h}$ avec h en mètres ✓
- **Contrôle** : $2,08\sqrt{45} \approx 13,95$ milles, soit $\approx 25,8$ km — cohérent avec les 24 km annoncés ✓

Réponse. $\alpha = \arctan \frac{45}{24\,000} \approx 0,107^\circ$, soit environ 6,4 minutes d'arc.

Correction de l'exercice 15 - Triangle inscrit dans un demi-cercle

- **Propriété clé** : un triangle inscrit dans un demi-cercle est **rectangle** ✓
- **Hypoténuse** : le diamètre, soit 26 cm ✓
- **Autre côté** : par Pythagore ✓
- **Calcul** :

$$\sqrt{676 - 100} = \sqrt{576} = 24 \text{ cm}$$

- **Triplet reconnaissable** : 10-24-26 ✓
- **Angle opposé au côté de 10** : $\sin \alpha = \frac{10}{26} \approx 0,3846$ ✓
- **Mesure** :

$$\alpha \approx 22,62^\circ$$

- **Angle opposé au côté de 24** : $90 - 22,62 = 67,38^\circ$ ✓
- **Contrôle** : $\sin 67,38^\circ \approx 0,9231$, et $\frac{24}{26} \approx 0,9231$ ✓
- **Somme des angles** : $22,62 + 67,38 + 90 = 180^\circ$ ✓
- **Aire** :

$$A = \frac{10 \times 24}{2} = 120 \text{ cm}^2$$

- **Hauteur relative à l'hypoténuse** : $\frac{2 \times 120}{26} \approx 9,231$ cm ✓
- **Contrôle par la relation métrique** : $\frac{10 \times 24}{26} \approx 9,231$ cm ✓
- **Aire du demi-disque** : $\frac{\pi \times 169}{2} \approx 265,465 \text{ cm}^2$ ✓
- **Proportion occupée par le triangle** : $\frac{120}{265,465} \approx 45,2\%$ ✓
- **Triangle d'aire maximale inscriptible** : le triangle rectangle **isocèle**, de côtés $13\sqrt{2}$ ✓
- **Son aire** : $\frac{169 \times 2}{2 \times 2} \dots$ soit 169 cm^2 ✓

— **Proportion maximale** : $\frac{169}{265,465} \approx 63,66\%$, c'est-à-dire $\frac{2}{\pi}$ ✓

Réponse. Autre côté 24 cm, angles $\approx 22,62^\circ$ et $\approx 67,38^\circ$, aire 120 cm^2 .

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : une charpente

a) **Demi-base** : 4,80 m ✓

— **Hauteur au faîtage** : $4,80 \times \tan 30^\circ$ ✓

— **Valeur** : $\tan 30^\circ \approx 0,5774$ ✓

— **Calcul** :

$$h \approx 2,771 \text{ m}$$

— **Valeur exacte** : $\frac{4,80\sqrt{3}}{3} = 1,6\sqrt{3} \approx 2,771 \text{ m}$ ✓

— **Longueur d'un arbalétrier** : $\frac{4,80}{\cos 30^\circ}$ ✓

— **Valeur** : $\cos 30^\circ \approx 0,8660$ ✓

— **Calcul** :

$$\ell \approx 5,543 \text{ m}$$

— **Valeur exacte** : $\frac{9,60}{\sqrt{3}} = 3,2\sqrt{3} \approx 5,543 \text{ m}$ ✓

— **Contrôle par Pythagore** : $23,04 + 7,678 = 30,718$, et $5,543^2 \approx 30,725$ ✓

b) **Poinçon** : il mesure 2,771 m, du faîtage au milieu de la base ✓

— **Point de fixation sur un arbalétrier** : son milieu ✓

— **Position de ce milieu** : à 2,40 m horizontalement du centre et 1,386 m de hauteur ✓

— **Justification** : le milieu d'un segment a pour coordonnées la moyenne des extrémités ✓

— **Le bas du poinçon** : au centre de la base, soit à l'origine ✓

— **Longueur de la contre-fiche** : $\sqrt{2,40^2 + 1,386^2}$ ✓

— **Calcul** : $\sqrt{5,76 + 1,921} = \sqrt{7,681} \approx 2,771 \text{ m}$ ✓

— **Coïncidence remarquable** : la contre-fiche mesure autant que le poinçon ✓

— **Explication** : avec une pente de 30° , le triangle formé est isocèle ✓

— **Contrôle de l'angle de la contre-fiche avec l'horizontale** : $\arctan \frac{1,386}{2,40} \approx 30,00^\circ$ ✓

— **Cohérence** : elle est **parallèle** à l'arbalétrier opposé ✓

c) **Aire de la ferme** :

$$A = \frac{9,60 \times 2,771}{2} \approx 13,30 \text{ m}^2$$

— **Contrôle exact** : $\frac{9,60 \times 1,6\sqrt{3}}{2} = 7,68\sqrt{3} \approx 13,30 \text{ m}^2$ ✓

— **Périmètre** : $9,60 + 2 \times 5,543 \approx 20,69 \text{ m}$ ✓

— **Longueur totale de bois de la ferme** : périmètre plus poinçon plus deux contre-fiches ✓

— **Calcul** : $20,69 + 2,771 + 2 \times 2,771 \approx 29,00 \text{ m}$ ✓

d) **Objectif** : $h = 3,20 \text{ m}$ avec une demi-base de 4,80 m ✓

— **Relation** : $\tan \alpha = \frac{3,20}{4,80} = \frac{2}{3}$ ✓

— **Valeur** : $\approx 0,6667$ ✓

— **Angle** :

$$\alpha \approx 33,69^\circ$$

— **Contrôle** : $\tan 33,69^\circ \approx 0,6667$ ✓

— **Nouvelle longueur d'arbalétrier** : $\sqrt{4,80^2 + 3,20^2}$ ✓

— **Calcul** :

$$\sqrt{23,04 + 10,24} = \sqrt{33,28} \approx 5,769 \text{ m}$$

— **Augmentation** : $5,769 - 5,543 \approx 0,226 \text{ m}$, soit 4,1 % ✓

— **Nouvelle aire** : $\frac{9,60 \times 3,20}{2} = 15,36 \text{ m}^2$ ✓

— **Augmentation de l'aire** : $\frac{15,36 - 13,30}{13,30} \approx 15,5 \%$ ✓

— **Bilan de l'arbitrage** : 4,1 % de bois en plus pour 15,5 % d'aire gagnée ✓

— **Contrôle du rapport** : les pentes usuelles des charpentes tuiles vont de 30° à 40° , la solution est donc réaliste ✓

Réponse. a) $h \approx 2,77 \text{ m}$ et arbalétriers $\approx 5,54 \text{ m}$ · b) contre-fiche $\approx 2,77 \text{ m}$ · c) $\approx 13,30 \text{ m}^2$ · d) $\alpha \approx 33,69^\circ$ et arbalétrier $\approx 5,77 \text{ m}$.