

Plaquette 2 – Calcul vectoriel : Chasles, sommes et constructions

Vecteurs du plan — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Relation de Chasles. Pour trois points quelconques A, B, C :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Elle s'enchaîne : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.

Vecteur opposé et différence.

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$$

Le dernier résultat s'obtient en écrivant $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$.

Écriture	Simplification
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$	$\vec{0}$
$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{CB}$
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{CB}$
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$	$\vec{0}$

Coordonnées. Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$:

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Pour $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ et un réel k :

$$\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix} \quad k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

Parallélogramme. $ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, ce qui équivaut à $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Milieu. I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$, et alors

$$I \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

Méthode de construction. Pour placer M tel que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$: on part de A , on reporte k fois le vecteur $\vec{u}$. Si $k < 0$, on reporte dans le sens opposé.

Correction de l'exercice 1 – Enchaîner Chasles

— **Premier calcul** : les points B « se compensent ».

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

— **Deuxième calcul** : on enchaîne deux fois.

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MQ}$$

— **Troisième calcul** : les termes ne sont pas dans le bon ordre ✓

— **Réorganisation** : l'addition de vecteurs est **commutative**.

$$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{EH}$$

- **Méthode générale** : on cherche à faire apparaître un point **commun** entre l'arrivée d'un vecteur et le départ du suivant ✓
- **Contrôle** : dans $\overrightarrow{EH}$, on retrouve le **départ du premier** et l'**arrivée du dernier** ✓
- **Piège évité** : écrire $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{EH}$ serait faux, F et G étant distincts ✓
- **Vérification en coordonnées** : avec $E(1; 2)$, $F(4; 3)$, $G(5; 7)$, $H(2; 8)$ ✓
- **Calcul de $\overrightarrow{EF}$** : $(3; 1)$ ✓
- **Calcul de $\overrightarrow{FG}$** : $(1; 4)$ ✓
- **Calcul de $\overrightarrow{GH}$** : $(-3; 1)$ ✓
- **Somme** : $(3 + 1 - 3; 1 + 4 + 1) = (1; 6)$ ✓
- **Contrôle** : $\overrightarrow{EH} = (2 - 1; 8 - 2) = (1; 6)$ ✓

Réponse. $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{MQ}$; $\overrightarrow{EH}$.

Correction de l'exercice 2 - Différence de deux vecteurs

- **Premier calcul** : on remplace la soustraction par l'opposé.

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$$

- **Règle à retenir** : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, les points de **départ communs** disparaissent ✓
- **Deuxième calcul** : $-\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

- **Troisième calcul** : on enchaîne.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

- **Interprétation géométrique** : on revient au point de départ, le trajet fermé donne le vecteur nul ✓
- **Généralisation** : tout circuit fermé donne $\vec{0}$ ✓
- **Vérification en coordonnées** : avec $A(0; 1)$, $B(3; 2)$, $C(1; 5)$ ✓
- **Calcul de $\overrightarrow{AB}$** : $(3; 1)$ ✓
- **Calcul de $\overrightarrow{AC}$** : $(1; 4)$ ✓
- **Différence** : $(3 - 1; 1 - 4) = (2; -3)$ ✓
- **Contrôle** : $\overrightarrow{CB} = (3 - 1; 2 - 5) = (2; -3)$ ✓
- **Calcul de $\overrightarrow{BC}$** : $(-2; 3)$ ✓
- **Contrôle du troisième calcul** : $(3; 1) + (-2; 3) + (-1; -4) = (0; 0)$ ✓

Réponse. $\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\vec{0}$.

Correction de l'exercice 3 - Somme et différence en coordonnées

- **Somme** : on additionne composante par composante.

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ -2 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- **Différence** :

$$\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 + 1 \\ -2 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

- **Double de $\vec{u}$** : $2\vec{u}(6; -4)$ ✓
- **Triple de $\vec{v}$** : $3\vec{v}(-3; 15)$ ✓

— **Combinaison :**

$$2\vec{u} - 3\vec{v} \begin{pmatrix} 6+3 \\ -4-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -19 \end{pmatrix}$$

- **Contrôles des abscisses :** $2 \times 3 - 3 \times (-1) = 6 + 3 = 9$ ✓
- **Contrôles des ordonnées :** $2 \times (-2) - 3 \times 5 = -4 - 15 = -19$ ✓
- **Vecteur nul :** $\vec{u} - \vec{u} = (0; 0)$ ✓
- **Opposé de $\vec{u}$:** $-\vec{u}(-3; 2)$ ✓
- **Contrôle :** $\vec{u} + (-\vec{u}) = (0; 0)$ ✓
- **Somme des deux résultats :** $(\vec{u} + \vec{v}) + (\vec{u} - \vec{v}) = (2 + 4; 3 - 7) = (6; -4)$ ✓
- **Contrôle :** c'est bien $2\vec{u}$ ✓
- **Différence des deux résultats :** $(2 - 4; 3 + 7) = (-2; 10) = 2\vec{v}$ ✓
- **Cohérence :** les deux identités remarquables des vecteurs sont vérifiées ✓

Réponse. $\vec{u} + \vec{v}(2; 3)$; $\vec{u} - \vec{v}(4; -7)$; $2\vec{u}(6; -4)$; $2\vec{u} - 3\vec{v}(9; -19)$.

Correction de l'exercice 4 - Construire un point par une égalité

- **Traduction en coordonnées :** $\overrightarrow{AM}(x_M - 1; y_M - 2)$ ✓
- **Égalité de vecteurs :** elle impose l'égalité des deux composantes ✓
- **Système :** $x_M - 1 = 4$ et $y_M - 2 = -3$ ✓
- **Résolution :** $x_M = 5$ et $y_M = -1$ ✓
- **Donc :**

$$M(5; -1)$$

- **Vérification :** $\overrightarrow{AM} = (5 - 1; -1 - 2) = (4; -3)$ ✓
- **Pour N :** $-2\vec{u}(-8; 6)$ ✓
- **Système :** $x_N - 1 = -8$ et $y_N - 2 = 6$ ✓
- **Résolution :**

$$N(-7; 8)$$

- **Vérification :** $\overrightarrow{AN} = (-7 - 1; 8 - 2) = (-8; 6)$ ✓
- **Contrôle de colinéarité :** $\overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AM}$ ✓
- **Position relative :** N est de l'autre côté de A par rapport à M ✓
- **Distances :** $AM = \sqrt{16 + 9} = 5$ et $AN = \sqrt{64 + 36} = 10$ ✓
- **Contrôle :** $AN = 2AM$, conforme au coefficient $|-2| = 2$ ✓

Réponse. $M(5; -1)$ et $N(-7; 8)$.

Correction de l'exercice 5 - Quatrième sommet d'un parallélogramme

- **Caractérisation :** dans $ABCD$, les côtés $[AB]$ et $[DC]$ sont parallèles et de même longueur ✓
- **Traduction vectorielle :** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ✓
- **Calcul de $\overrightarrow{AB}$:** $(4 + 2; 3 - 1) = (6; 2)$ ✓
- **Expression de $\overrightarrow{DC}$:** $(1 - x_D; 6 - y_D)$ ✓
- **Système :** $1 - x_D = 6$ et $6 - y_D = 2$ ✓
- **Résolution :** $x_D = -5$ et $y_D = 4$ ✓
- **Donc :**

$$D(-5; 4)$$

- **Vérification** : $\overrightarrow{DC} = (1 + 5; 6 - 4) = (6; 2) = \overrightarrow{AB}$ ✓
- **Autre méthode — les diagonales** : elles ont le même milieu ✓
- **Milieu de $[AC]$** : $\left(\frac{-2+1}{2}; \frac{1+6}{2}\right) = (-0,5; 3,5)$ ✓
- **Milieu de $[BD]$** : $\left(\frac{4-5}{2}; \frac{3+4}{2}\right) = (-0,5; 3,5)$ ✓
- **Contrôle** : les deux milieux coïncident ✓
- **Attention à l'ordre des lettres** : c'est $ABCD$, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, et non $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ✓
- **Avec l'autre convention** : en cherchant D' tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD'}$, on trouverait $D'(7; 8)$ ✓
- **Contrôle** : $\overrightarrow{CD'} = (7 - 1; 8 - 6) = (6; 2)$ ✓

Réponse. $D(-5; 4)$.

Correction de l'exercice 6 - Décomposer sur deux vecteurs

- **Propriété du parallélogramme** : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{v}$ ✓
- **Calcul de $\overrightarrow{AC}$** : par Chasles,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v}$$
- **Interprétation** : la diagonale $\overrightarrow{AC}$ est la **somme** des deux côtés ✓
- **Calcul de $\overrightarrow{BD}$** : par Chasles en passant par A,

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} - \vec{u}$$
- **Interprétation** : l'autre diagonale est la **différence** des deux côtés ✓
- **Calcul de $\overrightarrow{CA}$** : c'est l'opposé de $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{CA} = -\vec{u} - \vec{v} = -(\vec{u} + \vec{v})$$
- **Contrôle** : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ ✓
- **Vérification en coordonnées** : avec $A(0; 0)$, $B(4; 1)$, $D(1; 3)$ ✓
- **Alors** : $\vec{u} = (4; 1)$ et $\vec{v} = (1; 3)$ ✓
- **Quatrième sommet** : $C = A + \vec{u} + \vec{v} = (5; 4)$ ✓
- **Contrôle de $\overrightarrow{AC}$** : $(5; 4) = (4 + 1; 1 + 3)$ ✓
- **Contrôle de $\overrightarrow{BD}$** : $(1 - 4; 3 - 1) = (-3; 2)$, et $\vec{v} - \vec{u} = (1 - 4; 3 - 1) = (-3; 2)$ ✓
- **Somme des diagonales** : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = (\vec{u} + \vec{v}) + (\vec{v} - \vec{u}) = 2\vec{v}$ ✓
- **Contrôle** : $(5; 4) + (-3; 2) = (2; 6) = 2\vec{v}$ ✓

Réponse. $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{v} - \vec{u}$ et $\overrightarrow{CA} = -(\vec{u} + \vec{v})$.

Correction de l'exercice 7 - Point défini par une combinaison

- **Calcul de $\overrightarrow{AB}$** : $(6 - 2; 3 + 1) = (4; 4)$ ✓
- **Calcul de $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$** : $(3; 3)$ ✓
- **Système pour M** : $x_M - 2 = 3$ et $y_M + 1 = 3$ ✓
- **Résolution** :

$$M(5; 2)$$

- **Vérification** : $\overrightarrow{AM} = (3; 3) = \frac{3}{4}(4; 4)$ ✓
- **Position de M** : sur le segment $[AB]$, aux trois quarts ✓
- **Calcul de $\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$** : $(10; 10)$ ✓
- **Système pour P** : $x_P - 2 = 10$ et $y_P + 1 = 10$ ✓

— **Résolution :**

$$P(12; 9)$$

- **Vérification** : $\overrightarrow{AP} = (10; 10)$ ✓
 - **Position de P** : au-delà de B, puisque $\frac{5}{2} > 1$ ✓
 - **Longueurs** : $AB = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \approx 5,657$ ✓
 - **Contrôle** : $AM = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, soit bien $\frac{3}{4}$ de $4\sqrt{2}$ ✓
 - **Contrôle** : $AP = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$, soit $\frac{5}{2}$ de $4\sqrt{2}$ ✓
 - **Alignement** : A, M, B, P sont alignés, dans cet ordre ✓
- Réponse.** $M(5; 2)$ et $P(12; 9)$.

Correction de l'exercice 8 - Somme nulle et milieu

- **Hypothèse** : I est le milieu de [AB] ✓
 - **Traduction** : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ✓
 - **Donc** : $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{IB}$ ✓
 - **Somme** :
- $$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$
- **Conclusion** : la propriété est démontrée ✓
 - **Coordonnées du milieu** : $I\left(\frac{-3+5}{2}; \frac{2-4}{2}\right) = (1; -1)$ ✓
 - **Calcul de $\overrightarrow{IA}$** : $(-3 - 1; 2 + 1) = (-4; 3)$ ✓
 - **Calcul de $\overrightarrow{IB}$** : $(5 - 1; -4 + 1) = (4; -3)$ ✓
 - **Somme** : $(-4 + 4; 3 - 3) = (0; 0)$ ✓
 - **Contrôle** : la propriété est bien vérifiée ✓
 - **Opposition** : $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ ✓
 - **Longueurs** : $IA = IB = \sqrt{16 + 9} = 5$ ✓
 - **Contrôle par AB** : $AB = \sqrt{64 + 36} = 10 = 2 \times 5$ ✓
 - **Réciproque** : si $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$, alors $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ et I est le milieu ✓
 - **Équivalence** : « I milieu de [AB] » $\Leftrightarrow$ « $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ » ✓

Réponse. $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ donc la somme est nulle ; avec $I(1; -1)$, $(-4; 3) + (4; -3) = (0; 0)$.

Correction de l'exercice 9 - Chasles pour prouver une égalité

- **Stratégie** : décomposer les deux membres sur les mêmes points ✓
 - **Membre de gauche** : on insère D dans $\overrightarrow{AB}$.
- $$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$$
- **Puis** : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD}$ ✓
 - **Membre de droite** : on insère D dans $\overrightarrow{CB}$.
- $$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$$
- **Puis** : $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$ ✓
 - **Comparaison** : les deux membres sont la somme des **mêmes** trois vecteurs ✓
 - **Conclusion** : l'égalité est démontrée, quel que soit le quadrilatère ✓
 - **Autre rédaction** : montrer que la différence est nulle ✓
 - **Calcul de la différence** : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$ ✓

- **Contrôle** : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BD}$ ✓
- **Vérification en coordonnées** : $A(0; 0)$, $B(5; 1)$, $C(6; 4)$, $D(2; 5)$ ✓
- **Calculs** : $\overrightarrow{AB} = (5; 1)$ et $\overrightarrow{CD} = (-4; 1)$ ✓
- **Somme de gauche** : $(1; 2)$ ✓
- **Calculs** : $\overrightarrow{AD} = (2; 5)$ et $\overrightarrow{CB} = (-1; -3)$ ✓
- **Somme de droite** : $(1; 2)$ ✓
- **Conclusion** : les deux sommes coïncident ✓

Réponse. Les deux membres valent $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$ après insertion de D par Chasles.

Correction de l'exercice 10 - Résoudre une équation vectorielle

- **Passage en coordonnées** : $\overrightarrow{MA}(1 - x; 3 - y)$ et $\overrightarrow{MB}(7 - x; -1 - y)$ ✓
- **Abscisse de la somme** : $(1 - x) + 2(7 - x) = 1 - x + 14 - 2x = 15 - 3x$ ✓
- **Ordonnée** : $(3 - y) + 2(-1 - y) = 3 - y - 2 - 2y = 1 - 3y$ ✓
- **Système** : $15 - 3x = 0$ et $1 - 3y = 0$ ✓
- **Résolution** : $x = 5$ et $y = \frac{1}{3}$ ✓
- **Donc** :

$$M\left(5; \frac{1}{3}\right)$$

- **Vérification de l'abscisse** : $(1 - 5) + 2(7 - 5) = -4 + 4 = 0$ ✓
- **Vérification de l'ordonnée** : $\left(3 - \frac{1}{3}\right) + 2\left(-1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3} - \frac{8}{3} = 0$ ✓
- **Méthode vectorielle, plus rapide** : insérer A dans $\overrightarrow{MB}$ ✓
- **Développement** : $\overrightarrow{MA} + 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB}$ ✓
- **Équation** : $3\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ✓
- **Calcul de $\overrightarrow{AB}$** : $(6; -4)$ ✓
- **Calcul de $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$** : $\left(4; -\frac{8}{3}\right)$ ✓
- **Coordonnées de M** : $\left(1 + 4; 3 - \frac{8}{3}\right) = \left(5; \frac{1}{3}\right)$ ✓
- **Cohérence** : les deux méthodes donnent le même point, situé aux deux tiers de $[AB]$ ✓

Réponse. $M\left(5; \frac{1}{3}\right)$, situé aux deux tiers de $[AB]$ à partir de A .

Correction de l'exercice 11 - Centre de gravité

- **Passage en coordonnées** : la somme des abscisses vaut $(0 - x) + (6 - x) + (3 - x) = 9 - 3x$ ✓
- **Somme des ordonnées** : $(0 - y) + (0 - y) + (9 - y) = 9 - 3y$ ✓
- **Système** : $9 - 3x = 0$ et $9 - 3y = 0$ ✓
- **Résolution** :

$$G(3; 3)$$

- **Vérification de l'abscisse** : $(0 - 3) + (6 - 3) + (3 - 3) = -3 + 3 + 0 = 0$ ✓
- **Vérification de l'ordonnée** : $(0 - 3) + (0 - 3) + (9 - 3) = -3 - 3 + 6 = 0$ ✓
- **Formule générale** : $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$ ✓
- **Contrôle** : $\left(\frac{0 + 6 + 3}{3}; \frac{0 + 0 + 9}{3}\right) = (3; 3)$ ✓

- **Nom de ce point** : le **centre de gravité** du triangle ✓
- **Propriété remarquable** : il est sur chaque médiane, aux deux tiers depuis le sommet ✓
- **Milieu de $[BC]$** : $A' = (4,5; 4,5)$ ✓
- **Vecteur $\overrightarrow{AA'}$** : $(4,5; 4,5)$ ✓
- **Contrôle de la propriété** : $\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} = (3; 3) = \overrightarrow{AG}$ ✓
- **Milieu de $[AC]$** : $B' = (1,5; 4,5)$ ✓
- **Contrôle sur cette médiane** : $\overrightarrow{BB'} = (-4,5; 4,5)$, et $B + \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'} = (6 - 3; 0 + 3) = (3; 3)$ ✓

Réponse. $G(3; 3)$, centre de gravité du triangle.

Correction de l'exercice 12 - Vecteurs et translation

- **Principe de la translation** : l'image M' de M vérifie $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ ✓
- **Donc** : on ajoute $(-2; 4)$ à chaque point ✓
- **Image de A** : $A'(1 - 2; 1 + 4) = (-1; 5)$ ✓
- **Image de B** : $B'(5 - 2; 2 + 4) = (3; 6)$ ✓
- **Image de C** : $C'(3 - 2; 6 + 4) = (1; 10)$ ✓
- **Calcul de $\overrightarrow{AB}$** : $(4; 1)$ ✓
- **Calcul de $\overrightarrow{A'B'}$** : $(3 + 1; 6 - 5) = (4; 1)$ ✓
- **Conclusion** : les vecteurs sont **égaux**, donc les longueurs coïncident ✓
- **Longueur AB** : $\sqrt{16 + 1} = \sqrt{17} \approx 4,123$ ✓
- **Calcul de $\overrightarrow{BC}$** : $(-2; 4)$, de longueur $\sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4,472$ ✓
- **Calcul de $\overrightarrow{B'C'}$** : $(1 - 3; 10 - 6) = (-2; 4)$ ✓
- **Calcul de $\overrightarrow{AC}$** : $(2; 5)$, de longueur $\sqrt{29} \approx 5,385$ ✓
- **Calcul de $\overrightarrow{A'C'}$** : $(1 + 1; 10 - 5) = (2; 5)$ ✓
- **Conclusion générale** : la translation conserve les vecteurs, donc longueurs et angles ✓
- **Coïncidence notable** : B' et C ont les mêmes coordonnées $(3; 6)$ ✓
- **Contrôle** : $\overrightarrow{BC} = (-2; 4) = \vec{u}$, donc C est bien l'image de B ✓

Réponse. $A'(-1; 5)$, $B'(3; 6)$, $C'(1; 10)$; les vecteurs sont inchangés donc les longueurs aussi.

Correction de l'exercice 13 - Reconnaître une égalité fausse

- a) **Fausse** ✓
 - **Raison** : Chasles exige que l'arrivée du premier soit le départ du second ✓
 - **Ici** : l'arrivée est B et le départ C , distincts en général ✓
 - **Contre-exemple** : $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; 1)$, $D(1; 1)$ ✓
 - **Calculs** : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (1; 0) + (1; 0) = (2; 0)$ contre $\overrightarrow{AD} = (1; 1)$ ✓
- b) **Vraie** ✓
 - **Raison** : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ ✓
 - **Autre justification** : par Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ ✓
- c) **Fausse** ✓
 - **Calcul correct** : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$ ✓

- **Simplification** : $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$ ne se simplifie pas en général ✓
- **L'égalité juste** : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, avec un **plus** ✓
- **Contre-exemple** : $A(0; 0)$, $B(2; 0)$, $C(2; 3)$ ✓
- **Calculs** : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = (2; 0) - (0; 3) = (2; -3)$ contre $\overrightarrow{AC} = (2; 3)$ ✓

d) **Vraie** ✓

- **Décomposition** : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}$ ✓
- **Somme** : $2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$ ✓
- **Or** : I est le milieu de $[BC]$, donc $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ ✓
- **Conclusion** : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$ ✓
- **Contrôle numérique** : $A(0; 0)$, $B(4; 0)$, $C(0; 6)$ donnent $I(2; 3)$ ✓
- **Vérification** : $(4; 0) + (0; 6) = (4; 6) = 2(2; 3)$ ✓

Réponse. a) fausse · b) vraie · c) fausse · d) vraie (règle du parallélogramme et de la médiane).

Correction de l'exercice 14 - Un point sur une droite

- **Condition d'appartenance** : $M \in (AB)$ signifie $\overrightarrow{AM}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ ✓
- **Calcul de $\overrightarrow{AB}$** : $(3 + 1; 5 - 2) = (4; 3)$ ✓
- **Écriture** : $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ pour un réel k ✓
- **Abscisse de $\overrightarrow{AM}$** : $7 - (-1) = 8$ ✓
- **Équation** : $8 = 4k$, donc $k = 2$ ✓
- **Ordonnée de $\overrightarrow{AM}$** : $3k = 6$ ✓
- **Ordonnée de M** : $2 + 6 = 8$ ✓
- **Donc** :

$$M(7; 8)$$

- **Vérification** : $\overrightarrow{AM} = (8; 6) = 2(4; 3)$ ✓
- **Position** : $k = 2 > 1$, donc M est au-delà de B ✓
- **Contrôle par le déterminant** : $8 \times 3 - 6 \times 4 = 24 - 24 = 0$ ✓
- **Conclusion du contrôle** : $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont bien colinéaires ✓
- **Distances** : $AB = \sqrt{16 + 9} = 5$ et $AM = \sqrt{64 + 36} = 10$ ✓
- **Contrôle** : $AM = 2AB$ ✓
- **Autre lecture** : B est le milieu de $[AM]$, puisque $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$ ✓

Réponse. $M(7; 8)$ (avec $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$, donc B milieu de $[AM]$).

Correction de l'exercice 15 - Somme de vecteurs et hexagone

- **Première somme** : c'est un **circuit fermé**, de A à A ✓
- **Enchaînement de Chasles** :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \cdots + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$
- **Interprétation** : en parcourant tout le contour, on revient au départ ✓
- **Généralisation** : vrai pour tout polygone, régulier ou non ✓
- **Seconde somme** : dans un hexagone régulier, A et D sont **diamétralement opposés** ✓
- **Donc** : O est le milieu de $[AD]$ ✓
- **Conséquence** :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

- **Contrôle** : $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OD}$ ✓
- **Vérification en coordonnées** : avec O à l'origine et un rayon 1, $A(1; 0)$ et $D(-1; 0)$ ✓
- **Somme** : $(1; 0) + (-1; 0) = (0; 0)$ ✓
- **Autres paires opposées** : B et E , C et F ✓
- **Somme des six rayons** : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \dots + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$ ✓
- **Justification** : les six vecteurs se regroupent en trois paires opposées ✓
- **Une autre simplification classique** : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AO}$ ✓
- **Raison** : $ABOF$ est un losange, $\overrightarrow{AO}$ étant sa diagonale ✓

Réponse. Les deux sommes valent $\vec{0}$ (circuit fermé ; O milieu de $[AD]$).

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : étude d'un quadrilatère

- a) **Calcul de $\overrightarrow{AB}$** : $(1 + 3; -2 + 1) = (4; -1)$ ✓
- **Calcul de $\overrightarrow{DC}$** : $(4 - 0; 2 - 3) = (4; -1)$ ✓
 - **Égalité** : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ✓
 - **Conclusion** : $ABCD$ est un **parallélogramme** ✓
 - **Contrôle par l'autre paire** : $\overrightarrow{AD} = (3; 4)$ et $\overrightarrow{BC} = (3; 4)$ ✓
- b) **Longueur AB** : $\sqrt{16 + 1} = \sqrt{17} \approx 4,123$ ✓
- **Longueur AD** : $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ ✓
 - **Comparaison** : $AB \neq AD$, ce n'est donc **pas un losange** ✓
 - **Angle droit ?** On calcule le produit $4 \times 3 + (-1) \times 4 = 12 - 4 = 8 \neq 0$ ✓
 - **Conclusion** : les côtés ne sont pas perpendiculaires, ce n'est pas un rectangle ✓
 - **Nature exacte** : un parallélogramme quelconque ✓
 - **Périmètre** : $2(\sqrt{17} + 5) \approx 18,25$ ✓
- c) **Centre du parallélogramme** : c'est le milieu commun des diagonales ✓
- **Milieu de $[AC]$** : $\left(\frac{-3+4}{2}; \frac{-1+2}{2}\right) = (0,5; 0,5)$ ✓
 - **Milieu de $[BD]$** : $\left(\frac{1+0}{2}; \frac{-2+3}{2}\right) = (0,5; 0,5)$ ✓
 - **Contrôle** : les deux milieux coïncident, ce qui **confirme** le parallélogramme ✓
 - **Centre** :

$$O(0,5; 0,5)$$

- d) **Condition** : $ABEC$ parallélogramme signifie $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$ ✓
- **Système** : $x_E - 4 = 4$ et $y_E - 2 = -1$ ✓
 - **Résolution** :

$$E(8; 1)$$

- **Vérification** : $\overrightarrow{CE} = (8 - 4; 1 - 2) = (4; -1) = \overrightarrow{AB}$ ✓
- **Calcul de $\overrightarrow{BE}$** : $(8 - 1; 1 + 2) = (7; 3)$ ✓
- **Contrôle par Chasles** : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}$ ✓
- **Détail** : $(-4; 1) + (7; 3) + (4; -1) = (7; 3)$ ✓
- **Autre contrôle** : dans le parallélogramme $ABEC$, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC} = (7; 3)$ ✓
- **Longueur BE** : $\sqrt{49 + 9} = \sqrt{58} \approx 7,616$ ✓
- **Contrôle** : c'est bien la longueur de la diagonale AC du premier parallélogramme ✓

— **Bilan de la figure** : $ABCD$ et $ABEC$ partagent le côté $[AB]$, et E est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ ✓

Réponse. a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (4; -1)$, donc $ABCD$ est un parallélogramme · b) $AB = \sqrt{17}$ et $AD = 5$ · c) $O(0,5; 0,5)$ · d) $E(8; 1)$ et $\overrightarrow{BE} = (7; 3)$.