Plaquette 3 – Colinéarité : alignement, parallélisme et démonstrations

Vecteurs du plan — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Colinéarité. Deux vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ (ou $\vec{u} = \vec{0}$). Le test pratique :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow xy' - x'y = 0$$

Le nombre $xy' - x'y$ s'appelle le **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Question posée	Traduction vectorielle	Test
A, B, C alignés ?	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires	$\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) = 0$
$(AB) \parallel (CD)$?	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires	$\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}\right) = 0$
$ABCD$ parallélogramme ?	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$	**égalité**, pas seulement colinéarité

Attention à ne pas confondre. La colinéarité donne le **parallélisme** ; l'égalité de vecteurs donne en plus la **même longueur et le même sens**.

Rédaction type d'un alignement.

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. 2. Calculer le déterminant $x_{AB}y_{AC} - x_{AC}y_{AB}$. 3. Conclure : « le déterminant est nul, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ; les points A, B, C sont alignés. »

Aire d'un triangle en repère. On l'inscrit dans le plus petit rectangle aux côtés parallèles aux axes, puis on retire à l'aire du rectangle celles des triangles rectangles qui entourent le triangle.

Quels vecteurs choisir ? N'importe quels deux des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ conviennent : s'ils sont colinéaires, les trois points sont alignés. L'essentiel est de calculer chaque vecteur sans erreur de signe, arrivée moins départ.

Correction de l'exercice 1 – Tester une colinéarité

Deux vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul :

$$\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = xy' - x'y$$

Pour $\vec{u}(6\,;-4)$ et $\vec{v}(-9\,;6)$: $6\times 6 - (-9)\times(-4) = 36 - 36 = 0$, ils sont **colinéaires**. On trouve d'ailleurs $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{u}$, car $-\frac{3}{2}\times 6 = -9$ et $-\frac{3}{2}\times(-4) = 6$; le coefficient est négatif, les vecteurs sont de sens opposés.

Pour $\vec{a}(3\,;5)$ et $\vec{b}(6\,;9)$: $3\times 9 - 6\times 5 = 27 - 30 = -3 \neq 0$, ils **ne sont pas** colinéaires. **Contrôle** : il faudrait multiplier par 2 pour passer de 3 à 6, mais par 1,8 pour passer de 5 à 9.

Réponse. $\vec{u}$ et $\vec{v}$: oui (det = 0, $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{u}$) · $\vec{a}$ et $\vec{b}$: non (det = -3).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Alignement de trois points

Les points A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. On calcule $\overrightarrow{AB}(4+2\,;4-1)=(6\,;3)$ et $\overrightarrow{AC}(10+2\,;7-1)=(12\,;6)$, puis leur déterminant :

$$6\times 6-12\times 3=36-36=0$$

Les vecteurs sont colinéaires : les points sont **alignés**. On a même $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$, donc B est le milieu de $[AC]$.

Contrôle : le milieu de $[AC]$ est $\left(\dfrac{-2+10}{2}\,;\dfrac{1+7}{2}\right)=(4\,;4)$, c'est bien B.

Réponse. Oui : $\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=0$, et même $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$ donc B est le milieu de $[AC]$.

Correction de l'exercice 3 – Points non alignés

On calcule $\overrightarrow{AB}(4\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}(2\,;6)$, puis leur déterminant :

$$4\times 6-2\times 1=24-2=22\neq 0$$

Les vecteurs ne sont pas colinéaires : les points ne sont pas alignés, ils forment un vrai triangle.

Le plus petit rectangle aux côtés parallèles aux axes qui contient le triangle va de $x=1$ à $x=5$ et de $y=2$ à $y=8$: son aire vaut $4\times 6=24$. On lui retire les trois triangles rectangles situés autour de ABC :

— celui de sommets A, B, $(5\,;2)$: $\dfrac{4\times 1}{2}=2$;

— celui de sommets B, C, $(5\,;8)$: $\dfrac{2\times 5}{2}=5$;

— celui de sommets A, C, $(1\,;8)$: $\dfrac{2\times 6}{2}=6$.

L'aire de ABC vaut donc $24-(2+5+6)=11$ unités d'aire.

Réponse. $\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=22\neq 0$, donc non alignés ; l'aire vaut $24-13=11$.

Correction de l'exercice 4 – Parallélisme de deux droites

Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. On calcule $\overrightarrow{AB}(3\,;2)$ et $\overrightarrow{CD}(6\,;4)$:

$$\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}\right)=3\times 4-6\times 2=0$$

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles ; on a d'ailleurs $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}$.

Reste à savoir si elles sont confondues : il suffit de tester si C appartient à (AB). Avec $\overrightarrow{AC}(5\,;-3)$, $\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=3\times(-3)-5\times 2=-19\neq 0$: C n'est pas sur (AB). Les droites sont **strictement parallèles**.

Contrôle par les coefficients directeurs : $\dfrac{5-3}{2+1}=\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{4-0}{10-4}=\dfrac{2}{3}$.

Réponse. Oui, strictement parallèles : $\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}\right)=0$ et $C\notin(AB)$.

Correction de l'exercice 5 – Déterminer un paramètre

a) Les vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul :

$$\det(\vec{u}\,;\vec{v})=3\times 8-(m+2)\times m=24-m^2-2m$$

Il est nul si et seulement si $m^2+2m-24=0$ (on a multiplié par -1).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) En développant, $(m-4)(m+6) = m^2+6m-4m-24 = m^2+2m-24$. Par la règle du produit nul, $m=4$ ou $m=-6$.

Vérification : pour $m=4$, $\vec{u}(3\,;4)$ et $\vec{v}(6\,;8) = 2\vec{u}$; pour $m=-6$, $\vec{u}(3\,;-6)$ et $\vec{v}(-4\,;8)$, de déterminant $3\times 8-(-4)\times(-6) = 24-24 = 0$.

Réponse. a) en écrivant le déterminant · b) $m=4$ ou $m=-6$.

Correction de l’exercice 6 – Démontrer un parallélisme dans un triangle

On calcule les milieux avec la formule $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\,;\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$: $I(4\,;1)$ et $J(1\,;3)$. Puis $\overrightarrow{IJ}(1-4\,;3-1) = (-3\,;2)$ et $\overrightarrow{BC}(2-8\,;6-2) = (-6\,;4)$.

$$\det\left(\overrightarrow{IJ}\,;\overrightarrow{BC}\right) = (-3)\times 4-(-6)\times 2 = -12+12 = 0$$

Les vecteurs sont colinéaires, donc $(IJ)\parallel(BC)$. Plus précisément, $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$: c’est le théorème des milieux.

On peut le démontrer pour tout triangle, sans coordonnées :
$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Réponse. $\overrightarrow{IJ} = (-3\,;2)$ et $\overrightarrow{BC} = (-6\,;4) = 2\overrightarrow{IJ}$: les droites sont parallèles (théorème des milieux).

Correction de l’exercice 7 – Intersection de deux droites

On compare les directions : $\overrightarrow{AB}(4\,;2)$ et $\overrightarrow{CD}(4\,;-4)$ ont pour déterminant $4\times(-4)-4\times 2 = -24\neq 0$. Les droites ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes.

Pour trouver leur intersection, on écrit leurs équations réduites. (AB) a pour coefficient directeur $\dfrac{2}{4} = 0{,}5$ et passe par $A(1\,;1)$: $y = 0{,}5x+0{,}5$. (CD) a pour coefficient directeur $\dfrac{2-6}{6-2} = -1$ et passe par $C(2\,;6)$: $y = -x+8$. On résout

$$0{,}5x+0{,}5 = -x+8 \Leftrightarrow 1{,}5x = 7{,}5 \Leftrightarrow x = 5$$

puis $y = -5+8 = 3$. Le point d’intersection est $(5\,;3)$: c’est le point B lui-même, qui appartient donc à la droite (CD).

Réponse. det $= -24\neq 0$, donc sécantes en $E(5\,;3)$ — qui est le point B lui-même.

Correction de l’exercice 8 – Un point aligné à déterminer

Le point M est aligné avec A et B si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires. On a $\overrightarrow{AB}(3\,;4)$ et $\overrightarrow{AM}(11-2\,;t+1) = (9\,;t+1)$:

$$\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AM}\right) = 3(t+1)-9\times 4 = 3t-33$$

Il est nul si et seulement si $t=11$: $M(11\,;11)$.

Vérification : $\overrightarrow{AM}(9\,;12) = 3\overrightarrow{AB}$. Le point M est donc au-delà de B, à trois fois la distance AB de A. On retrouve le résultat avec l’équation de (AB), $y = \dfrac{4}{3}x-\dfrac{11}{3}$: en $x=11$, $y = \dfrac{44-11}{3} = 11$.

Réponse. $t=11$, et alors $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$.

Correction de l’exercice 9 – Losange ou parallélogramme ?

On compare $\overrightarrow{AB}(5\,;0)$ et $\overrightarrow{DC}(8-3\,;4-4) = (5\,;0)$: ils sont égaux, donc $ABCD$ est un **parallélogramme**.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Pour préciser sa nature, on compare deux côtés consécutifs : $AB = 5$ et $AD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs égaux est un **losange**.

Est-ce un carré ? On teste l'angle en A avec la réciproque du théorème de Pythagore dans ABD. Avec $\overrightarrow{BD}(-2\,;4)$, $BD^2 = 4 + 16 = 20$, alors que

$$AB^2 + AD^2 = 25 + 25 = 50 \neq 20$$

L'angle n'est pas droit : $ABCD$ est un losange, pas un carré. Son aire vaut base × hauteur, soit $5 \times 4 = 20$, puisque $[AB]$ est sur l'axe des abscisses et D à la hauteur 4.

Réponse. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (5\,;0)$ et $AB = AD = 5$: c'est un **losange** (d'aire 20).

Correction de l'exercice 10 – Trois points et un quatrième à placer

On cherche D tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$. La longueur est multipliée par $|k|$, donc $CD = 2AB$ impose $|k| = 2$; « D et B du même côté » signifie que $\overrightarrow{CD}$ a le même sens que $\overrightarrow{AB}$, donc $k = 2$.

Avec $\overrightarrow{AB}(2\,;-4)$, on obtient $\overrightarrow{CD}(4\,;-8)$:

$$x_D - 7 = 4 \quad \text{et} \quad y_D - 2 = -8 \qquad \text{donc} \qquad D(11\,;-6)$$

Vérification : $AB = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$ et $CD = \sqrt{16 + 64} = 4\sqrt{5} = 2AB$. Avec $k = -2$, on aurait trouvé $D'(3\,;10)$, symétrique de D par rapport à C.

Réponse. $D(11\,;-6)$ (l'autre solution, de sens opposé, serait $D'(3\,;10)$).

Correction de l'exercice 11 – Médianes concourantes

Le centre de gravité a pour coordonnées les moyennes de celles des sommets : $G\left(\dfrac{0+6+0}{3}\,;\dfrac{0+0+6}{3}\right) = (2\,;2)$. La médiane issue de A joint A au milieu de $[BC]$, $A'(3\,;3)$.

On compare $\overrightarrow{AG}(2\,;2)$ et $\overrightarrow{AA'}(3\,;3)$:

$$\det\left(\overrightarrow{AG}\,;\overrightarrow{AA'}\right) = 2 \times 3 - 3 \times 2 = 0$$

Ils sont colinéaires : G appartient à la médiane (AA'). Plus précisément, $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$: G est aux deux tiers de la médiane depuis le sommet.

Contrôle sur la médiane issue de B : avec $B'(0\,;3)$, $\overrightarrow{BG}(-4\,;2) = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$, puisque $\overrightarrow{BB'}(-6\,;3)$.

Réponse. $G(2\,;2)$ et $A'(3\,;3)$ donnent $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$: G est sur la médiane, aux deux tiers.

Correction de l'exercice 12 – Colinéarité et inconnue au dénominateur

Les trois points sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}(a-1\,;3)$ et $\overrightarrow{AC}(6\,;6)$ sont colinéaires :

$$\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) = 6(a-1) - 6 \times 3 = 6a - 24$$

Ce déterminant est nul pour $a = 4$ seulement : $B(4\,;5)$.

Vérification : $\overrightarrow{AB}(3\,;3)$ et $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$; B est même le milieu de $[AC]$, puisque $\left(\dfrac{1+7}{2}\,;\dfrac{2+8}{2}\right) = (4\,;5)$. La droite (AC) a pour équation $y = x + 1$, et $5 = 4 + 1$.

Réponse. $a = 4$, et $B(4\,;5)$ est alors le milieu de $[AC]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 13 – Trapèze

On compare les côtés $[AB]$ et $[DC]$: $\overrightarrow{AB}(8\,;0)$ et $\overrightarrow{DC}(6-2\,;3-3)=(4\,;0)$. Leur déterminant $8\times 0-4\times 0$ est nul, donc $(AB)\parallel(DC)$: $ABCD$ a deux côtés parallèles, c’est un **trapèze**.

Ce n’est pas un parallélogramme, car $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{DC}$: on a $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$, la grande base est deux fois plus longue que la petite.

Les côtés obliques $\overrightarrow{AD}(2\,;3)$ et $\overrightarrow{BC}(-2\,;3)$ ont la même longueur $\sqrt{13}$: le trapèze est **isocèle**. Sa hauteur vaut 3, d’où son aire :

$$A=\frac{(8+4)\times 3}{2}=18$$

Réponse. $(AB)\parallel(DC)$ car $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$, mais les vecteurs sont distincts : trapèze isocèle d’aire 18.

Correction de l’exercice 14 – Alignement sans coordonnées

On exprime $\overrightarrow{MN}$ en passant par A, puis on reconnaît $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$$

Or $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}$. Donc $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$: les vecteurs sont colinéaires et $(MN)\parallel(BC)$, avec de plus $MN=\frac{1}{3}BC$. C’est une configuration de Thalès.

Contrôle avec $A(0\,;0)$, $B(9\,;3)$, $C(3\,;12)$: $M(3\,;1)$, $N(1\,;4)$, $\overrightarrow{MN}(-2\,;3)$ et $\overrightarrow{BC}(-6\,;9)=3\overrightarrow{MN}$.

Réponse. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$: les droites sont parallèles.

Correction de l’exercice 15 – Vrai ou faux sur la colinéarité

a) **Faux.** La colinéarité donne le parallélisme, pas l’égalité des vecteurs. Contre-exemple : $A(0\,;0)$, $B(1\,;0)$, $C(0\,;1)$, $D(5\,;1)$; $\overrightarrow{AB}(1\,;0)$ et $\overrightarrow{CD}(5\,;0)$ sont colinéaires, mais $ABDC$ est un trapèze. La bonne condition est $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

b) **Vrai** : $\vec{0}=0\times\vec{u}$ pour tout vecteur $\vec{u}$, et le déterminant $0\times y-x\times 0$ est nul.

c) **Vrai** : c’est la caractérisation de la colinéarité. L’hypothèse $\vec{u}\neq\vec{0}$ est indispensable : avec $\vec{u}=\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$, le déterminant est nul mais aucun k ne vérifie $\vec{v}=k\times\vec{0}$.

d) **Vrai** : si $A=B$, alors $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$, colinéaire à $\overrightarrow{AC}$ d’après b). Deux points distincts définissent une droite, qui contient le troisième. On note la propriété utilisée :

$$\overrightarrow{AB}=\vec{0}\implies \det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=0$$

Réponse. a) faux (colinéarité ≠ égalité) · b) vrai · c) vrai · d) vrai.

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : configuration complète

a) On calcule les carrés des longueurs : $AB^2=6^2+(-2)^2=40$, $BC^2=2^2+6^2=40$ et $AC^2=8^2+4^2=80$. Comme $AB=BC$, le triangle est isocèle en B ; et comme

$$AB^2+BC^2=40+40=80=AC^2$$

la réciproque du théorème de Pythagore montre qu’il est rectangle en B. Son aire vaut $\dfrac{AB\times BC}{2}=\dfrac{\sqrt{40}\times\sqrt{40}}{2}=20$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Avec la formule du milieu : $I(1\,;2)$, $J(5\,;4)$ et $K(2\,;5)$.

c) $\vec{IJ}(4\,;2)$ et $\vec{AC}(8\,;4)$: $\det = 4\times 4 - 8\times 2 = 0$, donc $(IJ) \parallel (AC)$, avec $\vec{AC} = 2\vec{IJ}$ (théorème des milieux).

d) $G\left(\dfrac{-2+4+6}{3}\,;\dfrac{3+1+7}{3}\right) = \left(\dfrac{8}{3}\,;\dfrac{11}{3}\right)$. Pour IJK : $\left(\dfrac{1+5+2}{3}\,;\dfrac{2+4+5}{3}\right) = \left(\dfrac{8}{3}\,;\dfrac{11}{3}\right)$. Les deux centres coïncident : chaque sommet de ABC intervient deux fois dans les milieux, avec un coefficient $\dfrac{1}{2}$.

Réponse. a) rectangle isocèle en B, aire 20 · b) $I(1\,;2)$, $J(5\,;4)$, $K(2\,;5)$ · c) $\vec{AC} = 2\vec{IJ}$ · d) $G\left(\frac{8}{3}\,;\frac{11}{3}\right)$, commun aux deux triangles.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).