

Plaque 3 - Colinéarité : alignement, parallélisme et démonstrations

Vecteurs du plan — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Colinéarité. Deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ (ou $\vec{u} = \vec{0}$). Le test pratique :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow xy' - x'y = 0$$

Le nombre $xy' - x'y$ s'appelle le **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Question posée	Traduction vectorielle	Test
A, B, C alignés ?	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires	$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0$
$(AB) \parallel (CD)$?	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires	$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = 0$
$ABCD$ parallélogramme ?	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$	égalité , pas seulement colinéarité

Attention à ne pas confondre. La colinéarité donne le **parallélisme** ; l'égalité de vecteurs donne en plus la **même longueur et le même sens**.

Rédaction type d'un alignement.

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer le déterminant $x_{AB}y_{AC} - x_{AC}y_{AB}$.
3. Conclure : « le déterminant est nul, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ; les points A, B, C sont alignés. »

Aire d'un triangle. La valeur absolue du déterminant donne le double de l'aire :

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})|$$

Un déterminant nul correspond donc à une aire nulle : les points sont alignés.

Piège fréquent. Pour tester l'alignement de A, B, C , il faut deux vecteurs partant du **même point**. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ fonctionnent aussi, mais jamais $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CB}$ mélangés sans précaution — en réalité le test marche avec n'importe quels deux des trois vecteurs, le déterminant étant nul dans tous les cas.

Correction de l'exercice 1 - Tester une colinéarité

- **Déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$** : $6 \times 6 - (-9) \times (-4)$ ✓
- **Calcul** : $36 - 36 = 0$ ✓
- **Conclusion** : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** ✓
- **Coefficient** : $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{u}$ ✓
- **Contrôle** : $-\frac{3}{2} \times 6 = -9$ ✓ et $-\frac{3}{2} \times (-4) = 6$ ✓
- **Sens** : $k < 0$, les vecteurs sont de sens **opposés** ✓
- **Déterminant de $\vec{a}$ et $\vec{b}$** : $3 \times 9 - 6 \times 5$ ✓
- **Calcul** : $27 - 30 = -3 \neq 0$ ✓
- **Conclusion** : $\vec{a}$ et $\vec{b}$ **ne sont pas** colinéaires ✓

- **Vérification par le quotient** : $\frac{6}{3} = 2$ mais $\frac{9}{5} = 1,8$ ✓
- **Cohérence** : les rapports diffèrent, il n'existe donc aucun k ✓
- **Aire associée** : un triangle construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$ aurait pour aire $\frac{|-3|}{2} = 1,5$ ✓
- **Longueurs** : $\|\vec{u}\| = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ ✓
- **Longueur de $\vec{v}$** : $\sqrt{81 + 36} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$ ✓
- **Contrôle du coefficient** : $\frac{3\sqrt{13}}{2\sqrt{13}} = 1,5 = \left|-\frac{3}{2}\right|$ ✓

Réponse. $\vec{u}$ et $\vec{v}$: oui ($\det = 0$, $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{u}$) · $\vec{a}$ et $\vec{b}$: non ($\det = -3$).

Correction de l'exercice 2 - Alignement de trois points

- **Étape 1 — vecteur $\overrightarrow{AB}$** : $(4 + 2; 4 - 1) = (6; 3)$ ✓
- **Étape 2 — vecteur $\overrightarrow{AC}$** : $(10 + 2; 7 - 1) = (12; 6)$ ✓
- **Étape 3 — déterminant** :

$$6 \times 6 - 12 \times 3 = 36 - 36 = 0$$
- **Étape 4 — conclusion** : le déterminant est nul, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ✓
- **Réponse** : les points A, B, C sont **alignés** ✓
- **Coefficient** : $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ ✓
- **Contrôle** : $2 \times (6; 3) = (12; 6)$ ✓
- **Position** : B est le **milieu** de $[AC]$ ✓
- **Contrôle du milieu** : $\left(\frac{-2 + 10}{2}; \frac{1 + 7}{2}\right) = (4; 4) = B$ ✓
- **Contrôle par un autre couple** : $\overrightarrow{BC} = (6; 3) = \overrightarrow{AB}$ ✓
- **Longueurs** : $AB = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ ✓
- **Longueur AC** : $\sqrt{144 + 36} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$ ✓
- **Contrôle** : $AC = 2AB$ ✓
- **Aire du « triangle »** : $\frac{0}{2} = 0$, confirmant l'alignement ✓

Réponse. Oui : $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0$, et même $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ donc B est le milieu de $[AC]$.

Correction de l'exercice 3 - Points non alignés

- **Vecteur $\overrightarrow{AB}$** : $(4; 1)$ ✓
- **Vecteur $\overrightarrow{AC}$** : $(2; 6)$ ✓
- **Déterminant** :

$$4 \times 6 - 2 \times 1 = 24 - 2 = 22$$
- **Conclusion** : $22 \neq 0$, les vecteurs ne sont pas colinéaires ✓
- **Réponse** : les trois points **ne sont pas alignés**, ils forment un vrai triangle ✓
- **Aire** :

$$A = \frac{|22|}{2} = 11 \text{ unités d'aire}$$

- **Contrôle par un autre couple** : $\overrightarrow{BA} = (-4; -1)$ et $\overrightarrow{BC} = (-2; 5)$ ✓
- **Déterminant** : $(-4) \times 5 - (-2) \times (-1) = -20 - 2 = -22$ ✓
- **Cohérence** : même valeur absolue, donc même aire ✓
- **Longueurs des côtés** : $AB = \sqrt{17} \approx 4,123$ ✓

- **Longueur AC** : $\sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6,325$ ✓
- **Longueur BC** : $\sqrt{4 + 25} = \sqrt{29} \approx 5,385$ ✓
- **Contrôle de l'aire par la hauteur** : la hauteur relative à $[AB]$ vaut $\frac{2 \times 11}{\sqrt{17}} \approx 5,336$ ✓
- **Contrôle** : $\frac{\sqrt{17} \times 5,336}{2} \approx 11,0$ ✓
- **Triangle rectangle ?** $29 \neq 17 + 40$, donc non ✓

Réponse. $\det = 22 \neq 0$, donc non alignés ; l'aire vaut $\frac{22}{2} = 11$.

Correction de l'exercice 4 - Parallélisme de deux droites

- **Vecteur directeur de (AB)** : $\overrightarrow{AB}(3; 2)$ ✓
- **Vecteur directeur de (CD)** : $\overrightarrow{CD}(6; 4)$ ✓
- **Déterminant** :

$$3 \times 4 - 6 \times 2 = 12 - 12 = 0$$
- **Conclusion** : les vecteurs sont colinéaires, donc les droites sont **parallèles** ✓
- **Coefficient** : $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$ ✓
- **Question suivante — sont-elles confondues ?** Il faut tester si $C \in (AB)$ ✓
- **Vecteur $\overrightarrow{AC}$** : $(5; -3)$ ✓
- **Déterminant avec $\overrightarrow{AB}$** : $3 \times (-3) - 5 \times 2 = -9 - 10 = -19 \neq 0$ ✓
- **Conclusion** : $C \notin (AB)$, les droites sont **strictement parallèles** ✓
- **Vérification par les équations** : la pente de (AB) vaut $\frac{2}{3}$ ✓
- **Équation de (AB)** : $y = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$ ✓
- **Contrôle en A** : $\frac{2}{3} \times (-1) + \frac{11}{3} = \frac{-2 + 11}{3} = 3$ ✓
- **Pente de (CD)** : $\frac{4 - 0}{10 - 4} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ✓
- **Cohérence** : mêmes pentes, donc parallèles ✓
- **Ordonnée à l'origine de (CD)** : $0 = \frac{2}{3} \times 4 + b$, donc $b = -\frac{8}{3} \neq \frac{11}{3}$ ✓

Réponse. Oui, strictement parallèles : $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = 0$ et $C \notin (AB)$.

Correction de l'exercice 5 - Déterminer un paramètre

- **Condition** : le déterminant est nul ✓
- **Déterminant** : $3 \times 8 - (m + 2) \times m$ ✓
- **Développement** : $24 - m^2 - 2m$ ✓
- **Équation** :

$$-m^2 - 2m + 24 = 0 \quad \text{soit} \quad m^2 + 2m - 24 = 0$$
- **Discriminant** : $\Delta = 4 + 96 = 100$ ✓
- **Racine carrée** : $\sqrt{100} = 10$ ✓
- **Solutions** :

$$m = \frac{-2 - 10}{2} = -6 \quad \text{ou} \quad m = \frac{-2 + 10}{2} = 4$$
- **Vérification pour $m = 4$** : $\vec{u}(3; 4)$ et $\vec{v}(6; 8)$ ✓
- **Déterminant** : $3 \times 8 - 6 \times 4 = 24 - 24 = 0$ ✓
- **Coefficient** : $\vec{v} = 2\vec{u}$ ✓

- **Vérification pour $m = -6$** : $\vec{u}(3; -6)$ et $\vec{v}(-4; 8)$ ✓
- **Déterminant** : $3 \times 8 - (-4) \times (-6) = 24 - 24 = 0$ ✓
- **Coefficient** : $\vec{v} = -\frac{4}{3}\vec{u}$ ✓
- **Contrôle** : $-\frac{4}{3} \times 3 = -4$ ✓ et $-\frac{4}{3} \times (-6) = 8$ ✓
- **Somme et produit des racines** : $-6 + 4 = -2$ et $-6 \times 4 = -24$, conformes à $m^2 + 2m - 24$ ✓

Réponse. $m = 4$ ou $m = -6$.

Correction de l'exercice 6 - Démontrer un parallélisme dans un triangle

- **Milieu I** : $\left(\frac{0+8}{2}; \frac{0+2}{2}\right) = (4; 1)$ ✓
- **Milieu J** : $\left(\frac{0+2}{2}; \frac{0+6}{2}\right) = (1; 3)$ ✓
- **Vecteur $\vec{IJ}$** : $(1-4; 3-1) = (-3; 2)$ ✓
- **Vecteur $\vec{BC}$** : $(2-8; 6-2) = (-6; 4)$ ✓
- **Déterminant** :

$$(-3) \times 4 - (-6) \times 2 = -12 + 12 = 0$$
- **Conclusion** : $\vec{IJ}$ et $\vec{BC}$ sont colinéaires, donc $(IJ) \parallel (BC)$ ✓
- **Coefficient** : $\vec{BC} = 2\vec{IJ}$, autrement dit $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{BC}$ ✓
- **Nom du résultat** : c'est le **théorème des milieux** ✓
- **Longueurs** : $IJ = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ ✓
- **Longueur BC** : $\sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ ✓
- **Contrôle** : $BC = 2IJ$ ✓
- **Démonstration vectorielle générale** : $\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AJ}$ ✓
- **Substitutions** : $\vec{IA} = -\frac{1}{2}\vec{AB}$ et $\vec{AJ} = \frac{1}{2}\vec{AC}$ ✓
- **Donc** : $\vec{IJ} = \frac{1}{2}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{1}{2}\vec{BC}$ ✓
- **Portée** : cette démonstration vaut pour **tout** triangle, sans coordonnées ✓

Réponse. $\vec{IJ} = (-3; 2)$ et $\vec{BC} = (-6; 4) = 2\vec{IJ}$: les droites sont parallèles (théorème des milieux).

Correction de l'exercice 7 - Intersection de deux droites

- **Vecteur $\vec{AB}$** : $(4; 2)$ ✓
- **Vecteur $\vec{CD}$** : $(4; -4)$ ✓
- **Déterminant** : $4 \times (-4) - 4 \times 2 = -16 - 8 = -24 \neq 0$ ✓
- **Conclusion** : les droites sont **sécantes** ✓
- **Équation de (AB)** : pente $\frac{2}{4} = 0,5$ ✓
- **Ordonnée à l'origine** : $1 = 0,5 \times 1 + b$, donc $b = 0,5$ ✓
- **Donc** : $y = 0,5x + 0,5$ ✓
- **Équation de (CD)** : pente $\frac{2-6}{6-2} = -1$ ✓
- **Ordonnée à l'origine** : $6 = -2 + b$, donc $b = 8$ ✓
- **Donc** : $y = -x + 8$ ✓
- **Système** : $0,5x + 0,5 = -x + 8$ ✓
- **Résolution** : $1,5x = 7,5$, donc $x = 5$ ✓

— **Ordonnée** : $y = -5 + 8 = 3$ ✓

— **Point d'intersection** :

$$E(5; 3)$$

— **Observation** : c'est exactement le point B ✓

— **Contrôle** : $B \in (CD)$ puisque $-5 + 8 = 3$ ✓

— **Conclusion géométrique** : la droite (CD) passe par B ✓

Réponse. $\det = -24 \neq 0$, donc sécantes en $E(5; 3)$ — qui est le point B lui-même.

Correction de l'exercice 8 - Un point aligné à déterminer

— **Vecteur $\overrightarrow{AB}$** : $(3; 4)$ ✓

— **Vecteur $\overrightarrow{AM}$** : $(11 - 2; t + 1) = (9; t + 1)$ ✓

— **Condition d'alignement** : le déterminant est nul ✓

— **Déterminant** : $3(t + 1) - 9 \times 4$ ✓

— **Développement** : $3t + 3 - 36 = 3t - 33$ ✓

— **Équation** : $3t - 33 = 0$ ✓

— **Solution** :

$$t = 11$$

— **Donc** : $M(11; 11)$ ✓

— **Vérification** : $\overrightarrow{AM} = (9; 12)$ ✓

— **Contrôle du déterminant** : $3 \times 12 - 9 \times 4 = 36 - 36 = 0$ ✓

— **Coefficient** : $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$ ✓

— **Contrôle** : $3 \times (3; 4) = (9; 12)$ ✓

— **Position de M** : au-delà de B , à trois fois la distance AB depuis A ✓

— **Contrôle par l'équation de droite** : la pente vaut $\frac{4}{3}$, et $y = \frac{4}{3}x - \frac{11}{3}$ ✓

— **Vérification en $x = 11$** : $\frac{44}{3} - \frac{11}{3} = \frac{33}{3} = 11$ ✓

Réponse. $t = 11$, et alors $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$.

Correction de l'exercice 9 - Losange ou parallélogramme ?

— **Vecteur $\overrightarrow{AB}$** : $(5; 0)$ ✓

— **Vecteur $\overrightarrow{DC}$** : $(8 - 3; 4 - 4) = (5; 0)$ ✓

— **Égalité** : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ✓

— **Conclusion** : $ABCD$ est un **parallélogramme** ✓

— **Longueur AB** : 5 ✓

— **Longueur AD** : $\sqrt{9 + 16} = 5$ ✓

— **Égalité des côtés** : $AB = AD = 5$ ✓

— **Conclusion** : c'est un **losange** ✓

— **Test du rectangle** : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ s'évalue par $5 \times 3 + 0 \times 4 = 15 \neq 0$ ✓

— **Conclusion** : les côtés ne sont pas perpendiculaires, ce n'est pas un carré ✓

— **Diagonales** : $\overrightarrow{AC} = (8; 4)$ et $\overrightarrow{BD} = (-2; 4)$ ✓

— **Longueurs** : $AC = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \approx 8,944$ et $BD = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4,472$ ✓

— **Perpendicularité des diagonales** : $8 \times (-2) + 4 \times 4 = -16 + 16 = 0$ ✓

— **Cohérence** : dans un losange, les diagonales sont **perpendiculaires** ✓

— **Aire par les diagonales** : $\frac{AC \times BD}{2} = \frac{4\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}}{2} = \frac{40}{2} = 20$ ✓

— **Contrôle par base et hauteur** : base $AB = 5$ et hauteur 4, donc aire 20 ✓

Réponse. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (5; 0)$ et $AB = AD = 5$: c'est un **losange** (d'aire 20).

Correction de l'exercice 10 - Trois points et un quatrième à placer

— **Vecteur** $\overrightarrow{AB} : (2; -4)$ ✓

— **Longueur** $AB : \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4,472$ ✓

— **Condition de colinéarité** : $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$ ✓

— **Condition de longueur** : $|k| \times AB = 2AB$, donc $|k| = 2$ ✓

— **Choix du signe** : « du même côté » impose $k = 2$ ✓

— **Calcul** : $2\overrightarrow{AB} = (4; -8)$ ✓

— **Système** : $x_D - 7 = 4$ et $y_D - 2 = -8$ ✓

— **Résolution** :

$$D(11; -6)$$

— **Vérification** : $\overrightarrow{CD} = (4; -8) = 2\overrightarrow{AB}$ ✓

— **Longueur** $CD : \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \approx 8,944$ ✓

— **Contrôle** : $CD = 2AB$ ✓

— **L'autre solution** : avec $k = -2$, on obtiendrait $D'(3; 10)$ ✓

— **Contrôle** : $\overrightarrow{CD'} = (-4; 8) = -2\overrightarrow{AB}$ ✓

— **Distinction** : les deux points sont symétriques par rapport à C ✓

— **Contrôle** : le milieu de $[DD']$ est $\left(\frac{11+3}{2}; \frac{-6+10}{2}\right) = (7; 2) = C$ ✓

Réponse. $D(11; -6)$ (l'autre solution, de sens opposé, serait $D'(3; 10)$).

Correction de l'exercice 11 - Médianes concourantes

— **Centre de gravité** : $G\left(\frac{0+6+0}{3}; \frac{0+0+6}{3}\right) = (2; 2)$ ✓

— **Milieu de $[BC]$** : $A' = \left(\frac{6+0}{2}; \frac{0+6}{2}\right) = (3; 3)$ ✓

— **Vecteur** $\overrightarrow{AG} : (2; 2)$ ✓

— **Vecteur** $\overrightarrow{AA'} : (3; 3)$ ✓

— **Déterminant** :

$$2 \times 3 - 3 \times 2 = 6 - 6 = 0$$

— **Conclusion** : les vecteurs sont colinéaires, donc $G \in (AA')$ ✓

— **Coefficient** : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ ✓

— **Contrôle** : $\frac{2}{3} \times (3; 3) = (2; 2)$ ✓

— **Propriété retrouvée** : G est aux **deux tiers** de la médiane depuis le sommet ✓

— **Contrôle sur la médiane issue de B** : le milieu de $[AC]$ est $B' = (0; 3)$ ✓

— **Vecteur** $\overrightarrow{BB'} : (-6; 3)$ ✓

— **Vecteur** $\overrightarrow{BG} : (-4; 2)$ ✓

— **Déterminant** : $(-4) \times 3 - (-6) \times 2 = -12 + 12 = 0$ ✓

— **Coefficient** : $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ ✓

— **Conclusion générale** : G appartient aux trois médianes, qui sont donc **concourantes** en G ✓

- **Aire du triangle** : $\frac{6 \times 6}{2} = 18$, et chaque médiane la partage en deux parts égales de 9 ✓

Réponse. $G(2; 2)$ et $A'(3; 3)$ donnent $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$: G est sur la médiane, aux deux tiers.

Correction de l'exercice 12 - Colinéarité et inconnue au dénominateur

- **Vecteur $\overrightarrow{AB}$** : $(a - 1; 3)$ ✓
- **Vecteur $\overrightarrow{AC}$** : $(6; 6)$ ✓
- **Condition** : le déterminant est nul ✓
- **Déterminant** : $(a - 1) \times 6 - 6 \times 3$ ✓
- **Développement** : $6a - 6 - 18 = 6a - 24$ ✓
- **Équation** : $6a - 24 = 0$ ✓
- **Solution** :

$$a = 4$$

- **Donc** : $B(4; 5)$ ✓
- **Vérification** : $\overrightarrow{AB} = (3; 3)$ et $\overrightarrow{AC} = (6; 6)$ ✓
- **Contrôle du déterminant** : $3 \times 6 - 6 \times 3 = 0$ ✓
- **Coefficient** : $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ ✓
- **Position** : B est le **milieu** de $[AC]$ ✓
- **Contrôle du milieu** : $\left(\frac{1+7}{2}; \frac{2+8}{2}\right) = (4; 5)$ ✓
- **Équation de la droite** : pente $\frac{8-2}{7-1} = 1$, donc $y = x + 1$ ✓
- **Contrôle** : $B(4; 5)$ vérifie $5 = 4 + 1$ ✓
- **Unicité** : l'équation étant du premier degré en a , la solution est **unique** ✓

Réponse. $a = 4$, et $B(4; 5)$ est alors le milieu de $[AC]$.

Correction de l'exercice 13 - Trapèze

- **Vecteur $\overrightarrow{AB}$** : $(8; 0)$ ✓
- **Vecteur $\overrightarrow{DC}$** : $(6 - 2; 3 - 3) = (4; 0)$ ✓
- **Déterminant** : $8 \times 0 - 4 \times 0 = 0$ ✓
- **Conclusion** : les vecteurs sont colinéaires, donc $(AB) \parallel (DC)$ ✓
- **Mais** : $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$, puisque $8 \neq 4$ ✓
- **Conclusion** : ce n'est **pas** un parallélogramme ✓
- **Nature** : un **trapèze**, avec deux côtés parallèles de longueurs différentes ✓
- **Coefficient** : $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC}$ ✓
- **Longueurs des bases** : $AB = 8$ et $DC = 4$ ✓
- **Autres côtés** : $\overrightarrow{AD} = (2; 3)$ et $\overrightarrow{BC} = (-2; 3)$ ✓
- **Longueurs** : $AD = BC = \sqrt{13} \approx 3,606$ ✓
- **Précision** : c'est donc un trapèze **isocèle** ✓
- **Non-parallélisme des côtés obliques** : $2 \times 3 - (-2) \times 3 = 6 + 6 = 12 \neq 0$ ✓
- **Hauteur** : la différence d'ordonnées, soit 3 ✓
- **Aire** : $\frac{(8 + 4) \times 3}{2} = 18$ ✓
- **Contrôle par découpage** : deux triangles rectangles de base 2 et hauteur 3 (aire 3 chacun) plus un rectangle 4×3 (aire 12), soit 18 ✓

Réponse. $(AB) \parallel (DC)$ car $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC}$, mais les vecteurs sont distincts : trapèze isocèle

d'aire 18.

Correction de l'exercice 14 - Alignement sans coordonnées

- **Stratégie** : exprimer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ ✓
- **Décomposition par Chasles** : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$ ✓
- **Substitution** : $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ✓
- **Donc** :

$$\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

- **Simplification** : $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ ✓
- **Résultat** :

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

- **Conclusion** : les vecteurs sont colinéaires, donc $(MN) \parallel (BC)$ ✓
- **Information supplémentaire** : $MN = \frac{1}{3}BC$ ✓
- **Nom du résultat** : c'est une configuration de **Thalès** ✓
- **Vérification numérique** : $A(0; 0)$, $B(9; 3)$, $C(3; 12)$ ✓
- **Calcul de M** : $\frac{1}{3}(9; 3) = (3; 1)$ ✓
- **Calcul de N** : $\frac{1}{3}(3; 12) = (1; 4)$ ✓
- **Vecteur $\overrightarrow{MN}$** : $(1 - 3; 4 - 1) = (-2; 3)$ ✓
- **Vecteur $\overrightarrow{BC}$** : $(3 - 9; 12 - 3) = (-6; 9)$ ✓
- **Contrôle** : $\frac{1}{3}(-6; 9) = (-2; 3)$ ✓
- **Généralisation** : avec un coefficient k au lieu de $\frac{1}{3}$, on obtient $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BC}$ ✓

Réponse. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$: les droites sont parallèles.

Correction de l'exercice 15 - Vrai ou faux sur la colinéarité

a) **Faux** ✓

- **Raison** : la colinéarité donne le parallélisme, pas l'égalité ✓
- **Contre-exemple** : $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; 1)$, $D(5; 1)$ ✓
- **Calculs** : $\overrightarrow{AB} = (1; 0)$ et $\overrightarrow{CD} = (5; 0)$, colinéaires ✓
- **Mais** : les longueurs diffèrent (1 contre 5), c'est un trapèze ✓
- **Condition correcte** : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (attention à l'ordre) ✓

b) **Vrai** ✓

- **Raison** : $\vec{0} = 0 \times \vec{u}$ pour tout $\vec{u}$ ✓
- **Contrôle par le déterminant** : $0 \times y' - x' \times 0 = 0$ ✓
- **Conséquence** : deux points confondus ne donnent aucune information de direction ✓

c) **Vrai** ✓

- **C'est la caractérisation de la colinéarité** ✓
- **Rôle de l'hypothèse $\vec{u} \neq \vec{0}$** : elle garantit l'existence de k ✓
- **Sans cette hypothèse** : avec $\vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, le déterminant est nul mais aucun k ne convient ✓

— **Contrôle** : $k\vec{0} = \vec{0} \neq \vec{v}$ ✓

d) **Vrai** ✓

— **Cas de $A = B$** : alors $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ✓

— **Conclusion** : le vecteur nul est colinéaire à $\overrightarrow{AC}$ ✓

— **Interprétation** : deux points distincts déterminent une droite, qui passe donc par les trois ✓

— **Contrôle par l'aire** : le « triangle » est plat, d'aire nulle ✓

— **Remarque de rédaction** : ce cas dégénéré est souvent à écarter explicitement dans un énoncé ✓

Réponse. a) faux (colinéarité $\neq$ égalité) · b) vrai · c) vrai · d) vrai.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : configuration complète

a) **Vecteur $\overrightarrow{AB}$** : $(6; -2)$ ✓

— **Vecteur $\overrightarrow{AC}$** : $(8; 4)$ ✓

— **Déterminant** :

$$6 \times 4 - 8 \times (-2) = 24 + 16 = 40$$

— **Conclusion** : $40 \neq 0$, les points ne sont pas alignés, ABC est bien un triangle ✓

— **Aire** :

$$A = \frac{40}{2} = 20 \text{ unités d'aire}$$

— **Longueurs** : $AB = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6,325$ ✓

— **Longueur AC** : $\sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \approx 8,944$ ✓

— **Longueur BC** : $\sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6,325$ ✓

— **Remarque** : $AB = BC$, le triangle est **isocèle** en B ✓

— **Test de l'angle droit en B** : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ donne $(-6) \times 2 + 2 \times 6 = -12 + 12 = 0$ ✓

— **Conclusion** : le triangle est **rectangle isocèle** en B ✓

— **Contrôle de l'aire** : $\frac{AB \times BC}{2} = \frac{40}{2} = 20$ ✓

b) **Milieu I de $[AB]$** : $\left(\frac{-2+4}{2}; \frac{3+1}{2}\right) = (1; 2)$ ✓

— **Milieu J de $[BC]$** : $\left(\frac{4+6}{2}; \frac{1+7}{2}\right) = (5; 4)$ ✓

— **Milieu K de $[AC]$** : $\left(\frac{-2+6}{2}; \frac{3+7}{2}\right) = (2; 5)$ ✓

c) **Vecteur $\overrightarrow{IJ}$** : $(5-1; 4-2) = (4; 2)$ ✓

— **Vecteur $\overrightarrow{AC}$** : $(8; 4)$ ✓

— **Déterminant** : $4 \times 4 - 8 \times 2 = 16 - 16 = 0$ ✓

— **Conclusion** : $(IJ) \parallel (AC)$ ✓

— **Coefficient** : $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IJ}$, donc $IJ = \frac{1}{2}AC$ ✓

— **Contrôle des longueurs** : $IJ = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, et $AC = 4\sqrt{5}$ ✓

d) **Centre de gravité de ABC** :

$$G\left(\frac{-2+4+6}{3}; \frac{3+1+7}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}; \frac{11}{3}\right)$$

— **Valeurs approchées** : $G \approx (2,667; 3,667)$ ✓

- **Centre de gravité de IJK** : $\left(\frac{1+5+2}{3}; \frac{2+4+5}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}; \frac{11}{3}\right)$ ✓
- **Conclusion** : les deux centres de gravité **coïncident** ✓
- **Explication** : les coordonnées de I, J, K sont des demi-sommes des sommets, et chaque sommet y apparaît deux fois ✓
- **Détail de l'abscisse** : $\frac{1}{3} \left(\frac{x_A + x_B}{2} + \frac{x_B + x_C}{2} + \frac{x_A + x_C}{2} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{2(x_A + x_B + x_C)}{2}$ ✓
- **Simplification** : cela vaut bien $\frac{x_A + x_B + x_C}{3}$ ✓
- **Nom de IJK** : le **triangle médian** de ABC ✓
- **Aire de IJK** : ses côtés font la moitié de ceux de ABC , donc son aire est le quart, soit 5 ✓
- **Contrôle** : $\overrightarrow{IJ} = (4; 2)$ et $\overrightarrow{IK} = (1; 3)$, de déterminant $4 \times 3 - 1 \times 2 = 10$, soit une aire de 5 ✓

Réponse. a) $\det = 40 \neq 0$, aire 20 (rectangle isocèle en B) · b) $I(1; 2), J(5; 4), K(2; 5)$ · c) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IJ}$ · d) $G\left(\frac{8}{3}; \frac{11}{3}\right)$, commun aux deux triangles.