

Plaquette 1 - Coordonnées, égalités et colinéarité

Vecteurs du plan — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules et méthodes pour les vecteurs du plan.

- Coordonnées d'un vecteur : si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

- Égalité de vecteurs : $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si leurs coordonnées sont égales **deux à deux**.
- $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
- Somme : $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$, et relation de **Chasles** :
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- Milieu de $[AB]$: $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.
- Distance : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
- **Colinéarité** : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$. Trois points A, B, C sont alignés si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Correction de l'exercice 1 - Coordonnées d'un vecteur

On applique la formule du cours : on soustrait les coordonnées du point de **départ** à celles du point d'**arrivée**.

- $\overrightarrow{AB}$: abscisse $4 - (-1) = 5$, ordonnée $1 - 3 = -2$, donc $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.
- $\overrightarrow{BA}$: abscisse $-1 - 4 = -5$, ordonnée $3 - 1 = 2$, donc $\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- On retrouve $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$: les deux vecteurs sont opposés.

Piège. L'ordre compte : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ n'ont pas les mêmes coordonnées.

Réponse. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 2 - Reconnaître un parallélogramme

Critère du cours : $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

- $\overrightarrow{AB} : \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $\overrightarrow{DC} : \begin{pmatrix} 6 - 2 \\ 7 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Les coordonnées sont égales deux à deux, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$: $ABCD$ est un parallélogramme.

Attention à l'ordre des lettres. C'est bien $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (et non $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$) : dans un parallélogramme $ABCD$, les côtés $[AB]$ et $[DC]$ sont parallèles et de même longueur.

Réponse. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $ABCD$ est un parallélogramme.

Correction de l'exercice 3 - Relation de Chasles

On utilise la relation de Chasles $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$: le point d'arrivée du premier vecteur doit être le point de départ du second.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

b) On enchaîne : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, puis $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.

c) On transforme la soustraction : $-\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}$, donc

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$$

Réponse. a) $\overrightarrow{AC}$ · b) $\overrightarrow{AD}$ · c) $\overrightarrow{CB}$.

Correction de l'exercice 4 - Construire un point par une égalité vectorielle

— Calcul de $\overrightarrow{AB}$: $\begin{pmatrix} 3-0 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

— En notant $D(x; y)$, on a $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix}$.

— L'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ donne le système

$$\begin{cases} x-2=3 \\ y+1=4 \end{cases}$$

— Donc $x=5$ et $y=3$: $D(5; 3)$.

— Vérification : $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 5-2 \\ 3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$. Le point D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Réponse. $D(5; 3)$.

Correction de l'exercice 5 - Milieu et distance

Formules du cours :

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \quad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

— Milieu : $\frac{-3+5}{2} = 1$ et $\frac{2+(-4)}{2} = -1$, donc $M(1; -1)$.

— Distance : $x_B - x_A = 8$ et $y_B - y_A = -6$, donc

$$AB = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

— La longueur AB vaut exactement 10 unités.

Réponse. $M(1; -1)$ et $AB = 10$.

Correction de l'exercice 6 - Tester une colinéarité

Définition du cours : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

— Pour $\vec{v}$: on cherche k tel que $6 = 2k$ et $9 = 3k$. La première égalité donne $k = 3$, la seconde aussi. Donc $\vec{v} = 3\vec{u}$: les vecteurs **sont** colinéaires (ils ont la même direction).

— Pour $\vec{w}$: $4 = 2k$ donne $k = 2$, mais alors $3k = 6 \neq 5$. Aucun réel k ne convient : $\vec{u}$ et $\vec{w}$ **ne sont pas** colinéaires.

Réponse. $\vec{v} = 3\vec{u}$: colinéaires · $\vec{u}$ et $\vec{w}$: non colinéaires.

Correction de l'exercice 7 - Démontrer un alignement

Méthode du cours : trois points sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

$$- \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 8 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$- \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 - 1 \\ 12 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

— On cherche k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$: $5 = 3k$ donne $k = \frac{5}{3}$, et $10 = 6 \times \frac{5}{3} = 10$. La seconde coordonnée confirme.

— Les vecteurs sont colinéaires, donc les points A , B et C **sont alignés**.

Remarque. Il faut toujours vérifier les **deux** coordonnées : une seule égalité ne prouve rien.

Réponse. Oui : $\overrightarrow{AC} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$.

Correction de l'exercice 8 - Parallélisme de deux droites

Deux droites sont parallèles lorsque leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

$$- \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 - (-2) \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } (AB).$$

$$- \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 6 - 0 \\ 0 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } (CD).$$

— On cherche k tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$: l'abscisse donne $6 = 4k$, donc $k = 1,5$; on vérifie sur l'ordonnée : $1,5 \times 2 = 3$, ce qui est bien l'ordonnée de $\overrightarrow{CD}$. Donc $\overrightarrow{CD} = 1,5\overrightarrow{AB}$.

— Les vecteurs directeurs sont colinéaires : $(AB) \parallel (CD)$.

— Les droites sont-elles confondues ? $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ (car $2 = 4k$ donne $k = 0,5$ et $0,5 \times 2 = 1 \neq -4$) : C n'appartient pas à (AB) , les droites sont **strictement** parallèles.

Réponse. $\overrightarrow{CD} = 1,5\overrightarrow{AB}$: les droites sont strictement parallèles.

Correction de l'exercice 9 - Somme de vecteurs en coordonnées

On travaille coordonnée par coordonnée.

$$- \vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} 3 + (-1) \\ -2 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$- 2\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \times 3 \\ 2 \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$- 3\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \end{pmatrix}, \text{ donc}$$

$$2\vec{u} - 3\vec{v} \begin{pmatrix} 6 - (-3) \\ -4 - 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -19 \end{pmatrix}$$

Réponse. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 9 \\ -19 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 10 - Quatrième sommet et centre d'un parallélogramme

a) Critère : $EFGH$ est un parallélogramme si $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$.

$$- \overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ 0 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$- \text{En notant } H(x; y) : \overrightarrow{HG} \begin{pmatrix} 4 - x \\ 4 - y \end{pmatrix}.$$

$$- \text{Le système } \begin{cases} 4 - x = 4 \\ 4 - y = 2 \end{cases} \text{ donne } x = 0 \text{ et } y = 2, \text{ soit } H(0; 2).$$

b) On calcule les deux milieux avec la formule du cours.

$$- \text{Milieu de } [EG] : \left(\frac{-1 + 4}{2}; \frac{-2 + 4}{2} \right) = (1,5; 1).$$

$$- \text{Milieu de } [FH] : \left(\frac{3 + 0}{2}; \frac{0 + 2}{2} \right) = (1,5; 1).$$

— Les deux milieux coïncident : c'est le **centre** du parallélogramme, ce qui confirme le résultat de la question a).

Réponse. a) $H(0; 2)$ · b) même milieu $(1,5; 1)$.

Correction de l'exercice 11 - Synthèse : nature d'un quadrilatère

$$a) \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 9 - 5 \\ 3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

— $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, donc $ABCD$ est un parallélogramme.

b) On utilise la formule de la distance.

$$- AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$$

$$- AD = \sqrt{(5 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

— Un parallélogramme dont deux côtés consécutifs ont la même longueur est un **losange**. Donc $ABCD$ est un losange de côté 5.

— Est-ce un carré ? Il faudrait un angle droit. La diagonale $AC = \sqrt{9^2 + 3^2} = \sqrt{90}$, or dans un carré de côté 5 la diagonale vaudrait $5\sqrt{2} = \sqrt{50}$: ce n'est donc pas un carré.

Réponse. a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ · b) $AB = AD = 5$: $ABCD$ est un losange (non carré).