Plaquette 1 – Coordonnées, égalités et colinéarité

Vecteurs du plan — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules et méthodes pour les vecteurs du plan.

— Coordonnées d'un vecteur : si $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$, alors

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$$

— Égalité de vecteurs : $\vec{u}=\vec{v}$ si et seulement si leurs coordonnées sont égales **deux à deux**.

— $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

— Somme : $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$, et relation de **Chasles** : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

— Milieu de $[AB]$: $M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\,;\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$.

— Distance : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

— **Colinéarité** : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{v}=k\,\vec{u}$. Trois points A, B, C sont alignés si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Correction de l'exercice 1 – Coordonnées d'un vecteur

On applique la formule du cours : on soustrait les coordonnées du point de **départ** à celles du point d'**arrivée**.

— $\overrightarrow{AB}$: abscisse $4-(-1)=5$, ordonnée $1-3=-2$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$.

— $\overrightarrow{BA}$: abscisse $-1-4=-5$, ordonnée $3-1=2$, donc $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$.

— On retrouve $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$: les deux vecteurs sont opposés.

Piège. L'ordre compte : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ n'ont pas les mêmes coordonnées.

Réponse. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 2 – Reconnaître un parallélogramme

Critère du cours : $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

— $\overrightarrow{AB}$: $\begin{pmatrix}5-1\\3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$.

— $\overrightarrow{DC}$: $\begin{pmatrix}6-2\\7-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$.

— Les coordonnées sont égales deux à deux, donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$: $ABCD$ est un parallélogramme.

Attention à l'ordre des lettres. C'est bien $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ (et non $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$) : dans un parallélogramme $ABCD$, les côtés $[AB]$ et $[DC]$ sont parallèles et de même longueur.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$, donc $ABCD$ est un parallélogramme.

Correction de l'exercice 3 – Relation de Chasles

On utilise la relation de Chasles $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$: le point d'arrivée du premier vecteur doit être le point de départ du second.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

b) On enchaîne : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, puis $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.

c) On transforme la soustraction : $-\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}$, donc

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$$

Réponse. a) $\overrightarrow{AC}$ · b) $\overrightarrow{AD}$ · c) $\overrightarrow{CB}$.

Correction de l'exercice 4 – Construire un point par une égalité vectorielle

— Calcul de $\overrightarrow{AB}$: $\begin{pmatrix}3-0\\5-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

— En notant $D(x\,;y)$, on a $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x-2\\y+1\end{pmatrix}$.

— L'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ donne le système

$$\begin{cases}x-2=3\\y+1=4\end{cases}$$

— Donc $x = 5$ et $y = 3$: $D(5\,;3)$.

— Vérification : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}5-2\\3-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$. Le point D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Réponse. $D(5\,;3)$.

Correction de l'exercice 5 – Milieu et distance

Formules du cours :

$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\right) \qquad AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

— Milieu : $\dfrac{-3+5}{2} = 1$ et $\dfrac{2+(-4)}{2} = -1$, donc $M(1\,;-1)$.

— Distance : $x_B - x_A = 8$ et $y_B - y_A = -6$, donc

$$AB = \sqrt{8^2+(-6)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$$

— La longueur AB vaut exactement 10 unités.

Réponse. $M(1\,;-1)$ et $AB = 10$.

Correction de l'exercice 6 – Tester une colinéarité

Définition du cours : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$.

— Pour $\vec{v}$: on cherche k tel que $6 = 2k$ et $9 = 3k$. La première égalité donne $k = 3$, la seconde aussi. Donc $\vec{v} = 3\,\vec{u}$: les vecteurs **sont** colinéaires (ils ont la même direction).

— Pour $\vec{w}$: $4 = 2k$ donne $k = 2$, mais alors $3k = 6 \neq 5$. Aucun réel k ne convient : $\vec{u}$ et $\vec{w}$ **ne sont pas** colinéaires.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $\vec{v} = 3\vec{u}$: colinéaires · $\vec{u}$ et $\vec{w}$: non colinéaires.

Correction de l'exercice 7 – Démontrer un alignement

Méthode du cours : trois points sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

— $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-1\\8-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$.

— $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6-1\\12-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}$.

— On cherche k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$: $5 = 3k$ donne $k = \frac{5}{3}$, et $10 = 6 \times \frac{5}{3} = 10$. La seconde coordonnée confirme.

— Les vecteurs sont colinéaires, donc les points A, B et C **sont alignés**.

Remarque. Il faut toujours vérifier les **deux** coordonnées : une seule égalité ne prouve rien.

Réponse. Oui : $\overrightarrow{AC} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$.

Correction de l'exercice 8 – Parallélisme de deux droites

Deux droites sont parallèles lorsque leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

— $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-(-2)\\3-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB).

— $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}6-0\\0-(-3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (CD).

— On cherche k tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$: l'abscisse donne $6 = 4k$, donc $k = 1{,}5$; on vérifie sur l'ordonnée : $1{,}5 \times 2 = 3$, ce qui est bien l'ordonnée de $\overrightarrow{CD}$. Donc $\overrightarrow{CD} = 1{,}5\overrightarrow{AB}$.

— Les vecteurs directeurs sont colinéaires : $(AB) \parallel (CD)$.

— Les droites sont-elles confondues ? $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ (car $2 = 4k$ donne $k = 0{,}5$ et $0{,}5 \times 2 = 1 \neq -4$) : C n'appartient pas à (AB), les droites sont **strictement** parallèles.

Réponse. $\overrightarrow{CD} = 1{,}5\overrightarrow{AB}$: les droites sont strictement parallèles.

Correction de l'exercice 9 – Somme de vecteurs en coordonnées

On travaille coordonnée par coordonnée.

— $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix}3+(-1)\\-2+5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

— $2\vec{u}\begin{pmatrix}2\times 3\\2\times(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$.

— $3\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\15\end{pmatrix}$, donc

$$2\vec{u} - 3\vec{v}\begin{pmatrix}6-(-3)\\-4-15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\-19\end{pmatrix}$$

Réponse. $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}9\\-19\end{pmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 10 – Quatrième sommet et centre d’un parallélogramme

a) Critère : $EFGH$ est un parallélogramme si $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$.

— $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}3-(-1)\\0-(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.

— En notant $H(x\,;y)$: $\overrightarrow{HG}\begin{pmatrix}4-x\\4-y\end{pmatrix}$.

— Le système $\begin{cases}4-x=4\\4-y=2\end{cases}$ donne $x=0$ et $y=2$, soit $H(0\,;2)$.

b) On calcule les deux milieux avec la formule du cours.

— Milieu de $[EG]$: $\left(\dfrac{-1+4}{2}\,;\dfrac{-2+4}{2}\right) = (1{,}5\,;1)$.

— Milieu de $[FH]$: $\left(\dfrac{3+0}{2}\,;\dfrac{0+2}{2}\right) = (1{,}5\,;1)$.

— Les deux milieux coïncident : c’est le **centre** du parallélogramme, ce qui confirme le résultat de la question a).

Réponse. a) $H(0\,;2)$ · b) même milieu $(1{,}5\,;1)$.

Correction de l’exercice 11 – Image par une translation

L’image A' de A par la translation de vecteur $\vec{u}$ est le point tel que $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$. En notant $A'(x\,;y)$:

$$\begin{cases}x-2=-3\\y-(-1)=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\y=3\end{cases}$$

Donc $A'(-1\,;3)$: on a simplement ajouté les coordonnées de $\vec{u}$ à celles de A.

La distance AA' est la norme de $\vec{u}$: $AA' = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Réponse. $A'(-1\,;3)$ et $AA' = 5$.

Correction de l’exercice 12 – Point défini par une somme

On calcule les deux vecteurs, puis leur somme coordonnée par coordonnée : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, donc

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$$

En notant $D(x\,;y)$: $x-1=5$ et $y-1=4$, d’où $D(6\,;5)$.

Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$; comme $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, on obtient $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$. Le quadrilatère $ABDC$ est donc un **parallélogramme** : c’est la règle du parallélogramme pour additionner deux vecteurs de même origine.

Réponse. $D(6\,;5)$; $ABDC$ est un parallélogramme.

Correction de l’exercice 13 – Symétrique d’un point

A' est le symétrique de A par rapport à I si et seulement si I est le milieu de $[AA']$. En notant $A'(x\,;y)$, la formule du milieu donne

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\frac{-2+x}{2}=1 \quad \text{et} \quad \frac{3+y}{2}=1$$

donc $-2+x=2$ et $3+y=2$, soit $x=4$ et $y=-1$: $A'(4\,;-1)$.

Vérification : le milieu de $[AA']$ est $\left(\frac{-2+4}{2}\,;\frac{3-1}{2}\right)=(1\,;1)=I$. On peut aussi écrire $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IA'}$, avec $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$: on ajoute ce vecteur à I.

Réponse. $A'(4\,;-1)$.

Correction de l’exercice 14 – Colinéarité avec un paramètre

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul :

$$xy'-x'y=0 \Leftrightarrow 2\times m-3\times 6=0 \Leftrightarrow 2m=18 \Leftrightarrow m=9$$

Vérification : pour $m=9$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}=1{,}5\,\vec{u}$, puisque $1{,}5\times 2=3$ et $1{,}5\times 6=9$. Pour toute autre valeur de m, les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Réponse. $m=9$ (alors $\vec{v}=1{,}5\,\vec{u}$).

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : nature d’un quadrilatère

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}9-5\\3-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.

— $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, donc $ABCD$ est un parallélogramme.

b) On utilise la formule de la distance.

— $AB=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$.

— $AD=\sqrt{(5-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{25}=5$.

— Un parallélogramme dont deux côtés consécutifs ont la même longueur est un **losange**. Donc $ABCD$ est un losange de côté 5.

— Est-ce un carré ? Il faudrait un angle droit. La diagonale $AC=\sqrt{9^2+3^2}=\sqrt{90}$, or dans un carré de côté 5 la diagonale vaudrait $5\sqrt{2}=\sqrt{50}$: ce n’est donc pas un carré.

Réponse. a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ · b) $AB=AD=5$: $ABCD$ est un losange (non carré).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).