Plaquette 4 – Points à construire : symétriques, partages et équations vectorielles

Vecteurs du plan — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Deux méthodes pour un point défini par une relation.

Méthode	Quand l'utiliser
coordonnées, une équation par coordonnée	relation courte, coefficients simples
transformation par Chasles	plusieurs points, coefficients fractionnaires

Transformation type. Pour $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ avec $\alpha+\beta\neq 0$, on insère A :

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}\Longrightarrow(\alpha+\beta)\overrightarrow{MA}=-\beta\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

Symétriques.

Symétrie	Caractérisation	Coordonnées de l'image de $M(x\,;y)$
par rapport au point $I(a\,;b)$	I milieu de $[MM']$	$(2a-x\,;2b-y)$
par rapport à l'axe des abscisses	—	$(x\,;-y)$
par rapport à l'axe des ordonnées	—	$(-x\,;y)$
par rapport à l'origine	—	$(-x\,;-y)$

Partage d'un segment. Le point M tel que $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$ vérifie

$$M(x_A+k(x_B-x_A)\,;y_A+k(y_B-y_A))$$

Valeur de k	Position de M
$k=0$	en A
$0<k<1$	entre A et B
$k=\frac{1}{2}$	milieu de $[AB]$
$k=1$	en B
$k>1$	au-delà de B
$k<0$	avant A

Contrôle systématique. Une fois M trouvé, on recalcule le vecteur de l'énoncé et l'on vérifie qu'il vaut bien ce qui était demandé.

Correction de l'exercice 1 – Symétrique par rapport à un point

A' est le symétrique de A par rapport à I si et seulement si I est le milieu de $[AA']$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IA'}$. On calcule $\overrightarrow{AI}(1-3\,;4+2)=(-2\,;6)$, puis on résout $\overrightarrow{IA'}=(-2\,;6)$:

$$x_{A'}-1=-2\quad\text{et}\quad y_{A'}-4=6\qquad\text{donc}\qquad A'(-1\,;10)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle : le milieu de $[AA']$ est $\left(\frac{3-1}{2}\,;\,\frac{-2+10}{2}\right) = (1\,;4) = I$. On retient la formule qui en découle : $x_{A'} = 2x_I - x_A$ et $y_{A'} = 2y_I - y_A$. Attention à l'ordre : le symétrique de I par rapport à A serait un autre point, $(5\,;-8)$.

Réponse. $A'(-1\,;10)$.

Correction de l'exercice 2 – Trois symétries axiales

Une symétrie axiale par rapport à un axe du repère conserve la coordonnée lue sur cet axe et change le signe de l'autre.

— Par rapport à l'axe des abscisses, l'ordonnée change de signe : $M_1(-3\,;-5)$.
— Par rapport à l'axe des ordonnées, l'abscisse change de signe : $M_2(3\,;5)$.
— Par rapport à l'origine, les deux changent de signe : $M_3(3\,;-5)$.

Contrôle par les milieux : $[MM_1]$ a pour milieu $(-3\,;0)$, sur l'axe des abscisses ; $[MM_3]$ a pour milieu l'origine. Enchaîner les deux symétries axiales revient à la symétrie centrale : on passe de M à M_1, puis à M_3. Les quatre points forment un rectangle de côtés 6 et 10.

$$M(x\,;y) \mapsto (x\,;-y),\ (-x\,;y),\ (-x\,;-y)$$

Réponse. $M_1(-3\,;-5)$, $M_2(3\,;5)$ et $M_3(3\,;-5)$.

Correction de l'exercice 3 – Partager un segment en trois

Partager $[AB]$ en trois parts égales, c'est placer P et Q tels que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
Avec $\overrightarrow{AB}(12\,;9)$:

$$\overrightarrow{AP}(4\,;3) \Rightarrow P(0\,;5) \qquad \overrightarrow{AQ}(8\,;6) \Rightarrow Q(4\,;8)$$

Contrôle : $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{QB}$ valent tous $(4\,;3)$, les trois parts sont égales. Chacune mesure $\sqrt{16+9} = 5$, et $AB = \sqrt{144+81} = 15 = 3\times 5$. Le milieu de $[AB]$, $(2\,;6{,}5)$, se trouve bien entre P et Q.

Réponse. $P(0\,;5)$ et $Q(4\,;8)$.

Correction de l'exercice 4 – Équation vectorielle à deux points

On insère A dans $\overrightarrow{MB}$ par Chasles, pour qu'il ne reste qu'un vecteur dépendant de M : $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$.

$$3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

Avec $\overrightarrow{AB}(6\,;-6)$, $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}(1{,}5\,;-1{,}5)$, donc $M(3{,}5\,;3{,}5)$.

Vérification : $\overrightarrow{MA}(-1{,}5\,;1{,}5)$ et $\overrightarrow{MB}(4{,}5\,;-4{,}5)$, et $3\times(-1{,}5)+4{,}5 = 0$ comme $3\times 1{,}5 - 4{,}5 = 0$. Le point M est au quart de $[AB]$, plus près de A, qui porte le coefficient le plus grand.

Réponse. $M(3{,}5\,;3{,}5)$, situé au quart de $[AB]$ depuis A.

Correction de l'exercice 5 – Équation à trois points

On note $M(x\,;y)$ et l'on écrit l'égalité en coordonnées. Pour les abscisses : $(0-x)+(6-x)-(3-x) = 3-x$; pour les ordonnées : $(2-y)+(0-y)-(7-y) = -5-y$. Les deux doivent être nulles :

$$3-x=0 \quad\text{et}\quad -5-y=0 \qquad\text{donc}\qquad M(3\,;-5)$$

Vérification : $\overrightarrow{MA}(-3\,;7)$, $\overrightarrow{MB}(3\,;5)$ et $\overrightarrow{MC}(0\,;12)$; on a bien $(-3)+3-0=0$ et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$7 + 5 - 12 = 0$.

Méthode vectorielle : $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB}$, donc l'équation s'écrit $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$, soit $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CB}(3\,;-7)$, et l'on retrouve $M(3\,;-5)$.

Réponse. $M(3\,;-5)$.

Correction de l'exercice 6 – Une relation vectorielle sans solution

On simplifie l'expression avant tout calcul : par Chasles,

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BA}$$

Le résultat **ne dépend pas** de M : il vaut toujours $\overrightarrow{BA}(-3\,;-4)$.

La première équation demande $\overrightarrow{BA} = \vec{0}$, ce qui est faux puisque $A \neq B$: aucun point ne convient. La seconde demande $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire $2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, faux également : aucun point non plus.

En revanche, l'équation $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$ serait vraie pour **tous** les points M. La leçon : simplifier l'expression vectorielle avant de se lancer dans des coordonnées.

Réponse. Aucun point dans les deux cas : $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$ ne dépend pas de M et vaut $(-3\,;-4) \neq \vec{0}$.

Correction de l'exercice 7 – Point défini par une relation pondérée

On insère A dans $\overrightarrow{GB}$ par Chasles : $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}$. L'équation devient

$$2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{GA} = -3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$

Avec $\overrightarrow{AB}(6\,;9)$, $\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}(3{,}6\,;5{,}4)$, donc $G(-2+3{,}6\,;0+5{,}4) = (1{,}6\,;5{,}4)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ étant colinéaires de même sens, $\dfrac{AG}{AB} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$.

Vérification : $\overrightarrow{GA}(-3{,}6\,;-5{,}4)$ et $\overrightarrow{GB}(2{,}4\,;3{,}6)$; $2\times(-3{,}6) + 3\times 2{,}4 = 0$ et $2\times(-5{,}4) + 3\times 3{,}6 = 0$. Le point G est plus proche de B, qui porte le coefficient le plus grand.

Réponse. $G(1{,}6\,;5{,}4)$ et $\dfrac{AG}{AB} = \dfrac{3}{5}$.

Correction de l'exercice 8 – Reconstituer un triangle

Les coordonnées du centre de gravité sont les moyennes de celles des sommets. Pour les abscisses :

$$\frac{x_A + x_B + x_C}{3} = x_G \Leftrightarrow \frac{1 + 7 + x_C}{3} = 2 \Leftrightarrow 8 + x_C = 6 \Leftrightarrow x_C = -2$$

Pour les ordonnées : $\dfrac{-2 + 4 + y_C}{3} = 3$, soit $2 + y_C = 9$ et $y_C = 7$. Donc $C(-2\,;7)$.

Vérification par la relation vectorielle : $\overrightarrow{GA}(-1\,;-5)$, $\overrightarrow{GB}(5\,;1)$, $\overrightarrow{GC}(-4\,;4)$, de somme $(0\,;0)$. Autre contrôle : le milieu de $[AB]$ est $(4\,;1)$ et G est aux deux tiers de la médiane issue de C, puisque $\frac{2}{3}(6\,;-6) = (4\,;-4) = \overrightarrow{CG}$.

Réponse. $C(-2\,;7)$.

Correction de l'exercice 9 – Un point du plan par deux conditions

Le point A est l'origine du repère : les coordonnées de M sont donc celles du vecteur $\overrightarrow{AM}$. Avec $\overrightarrow{AB}(4\,;0)$ et $\overrightarrow{AC}(0\,;3)$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = (8-0\,;0-3) = (8\,;-3) \qquad \text{donc} \qquad M(8\,;-3)$$

Pour savoir si M est sur (BC), on compare $\overrightarrow{BC}(-4\,;3)$ et $\overrightarrow{BM}(4\,;-3)$: leur déterminant $(-4)\times(-3) - 4\times 3$ est nul, donc $M \in (BC)$. Plus précisément $\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{BC}$: M est le symétrique de C par rapport à B.

Contrôle : le milieu de $[CM]$ est $\left(\frac{0+8}{2}\,;\frac{3-3}{2}\right) = (4\,;0) = B$.

Réponse. $M(8\,;-3)$, et oui : $M \in (BC)$ (c'est le symétrique de C par rapport à B).

Correction de l'exercice 10 – Coordonnées dans un repère non standard

Dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)$, un point M a pour coordonnées $(x\,;y)$ lorsque $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$.

— A est l'origine : $A(0\,;0)$.
— $\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD}$: $B(1\,;0)$; de même $D(0\,;1)$.
— Dans le parallélogramme, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$: $C(1\,;1)$.

Le centre O est le milieu de $[AC]$, donc $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$:

$$O\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$$

Contrôle : le milieu de $[BD]$ est $\left(\frac{1+0}{2}\,;\frac{0+1}{2}\right)$, le même point. Ce repère n'est pas orthonormé : on y calcule milieux et colinéarités, mais pas les longueurs avec $\sqrt{x^2+y^2}$.

Réponse. $A(0\,;0)$, $B(1\,;0)$, $C(1\,;1)$, $D(0\,;1)$ et $O\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.

Correction de l'exercice 11 – Point d'intersection de deux médianes

Une médiane joint un sommet au milieu du côté opposé. On calcule $A'(6{,}5\,;7)$, milieu de $[BC]$, et $B'(3{,}5\,;6)$, milieu de $[AC]$.

La droite (AA') a pour coefficient directeur $\frac{7-1}{6{,}5-2} = \frac{4}{3}$ et passe par A : $y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$. La droite (BB') a pour coefficient directeur $\frac{6-3}{3{,}5-8} = -\frac{2}{3}$ et passe par B : $y = -\frac{2}{3}x + \frac{25}{3}$. On résout

$$\frac{4}{3}x - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}x + \frac{25}{3} \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$$

puis $y = \frac{20-5}{3} = 5$. Les médianes se coupent en $(5\,;5)$, qui est bien $\left(\frac{2+8+5}{3}\,;\frac{1+3+11}{3}\right)$, le centre de gravité.

Réponse. $G(5\,;5)$, qui vérifie bien $\left(\frac{2+8+5}{3}\,;\frac{1+3+11}{3}\right)$.

Correction de l'exercice 12 – Translation d'un vecteur inconnu

Le vecteur de la translation est celui qui envoie A sur son image : $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}(-2-3\,;4+1) = (-5\,;5)$.

L'image de B s'obtient en ajoutant $\vec{u}$: $B'(7-5\,;2+5) = (2\,;7)$. L'antécédent D de C vérifie $\overrightarrow{DC} = \vec{u}$: on **retire** $\vec{u}$ aux coordonnées de C,

$$D(0+5\,;0-5) = (5\,;-5)$$

Vérification : $\overrightarrow{DC}(0-5\,;0+5) = (-5\,;5) = \vec{u}$. La translation conserve les vecteurs :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$\overrightarrow{AB}(4\,;3)$ et $\overrightarrow{A'B'}(2+2\,;7-4)=(4\,;3)$, donc $AB=A'B'=5$.

Réponse. $\vec{u}(-5\,;5)$; $B'(2\,;7)$ et l'antécédent de C est $D(5\,;-5)$.

Correction de l'exercice 13 – Deux relations simultanées

On calcule $\overrightarrow{AB}(4\,;8)$, puis $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}(1\,;2)$, d'où $M(1+1\,;0+2)=(2\,;2)$. Pour N, on part de M et l'on ajoute $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}(2\,;4)$:

$$N(2+2\,;2+4)=(4\,;6)$$

Contrôle : par Chasles, $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, de coordonnées $(3\,;6)$; et en effet $N(1+3\,;0+6)$. Il reste $\overrightarrow{NB}(1\,;2)=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$: le segment $[AB]$ est découpé en un quart, une moitié et un quart.

Réponse. $M(2\,;2)$ et $N(4\,;6)$.

Correction de l'exercice 14 – Un point équidistant

Le point cherché est sur l'axe des abscisses : $M(x\,;0)$. On traduit $MA=MB$ par l'égalité des carrés des distances, qui évite les racines :

$$(x+1)^2+(0-2)^2=(x-5)^2+(0-6)^2$$

En développant, $x^2+2x+5=x^2-10x+61$. Les x^2 s'éliminent : $12x=56$, donc $x=\frac{14}{3}\approx 4{,}67$.

Vérification : $MA^2=\left(\frac{17}{3}\right)^2+4=\frac{289+36}{9}=\frac{325}{9}$ et $MB^2=\left(-\frac{1}{3}\right)^2+36=\frac{1+324}{9}=\frac{325}{9}$. Le point M est l'intersection de la médiatrice de $[AB]$ avec l'axe des abscisses.

Réponse. $M\left(\frac{14}{3}\,;0\right)\approx(4{,}667\,;0)$.

Correction de l'exercice 15 – Points construits sur les côtés

Les points P et Q s'obtiennent depuis l'origine A : $P\left(\frac{1}{3}\times 6\,;0\right)=(2\,;0)$ et $Q\left(0\,;\frac{2}{3}\times 6\right)=(0\,;4)$.

Les triangles APQ et ABC sont rectangles en A, leurs côtés de l'angle droit étant portés par les axes. Leurs aires valent

$$A_{APQ}=\frac{2\times 4}{2}=4 \qquad A_{ABC}=\frac{6\times 6}{2}=18$$

Le rapport vaut $\frac{4}{18}=\frac{2}{9}$, c'est le produit des coefficients $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$: chaque côté de l'angle droit est multiplié par son coefficient.

(PQ) n'est pas parallèle à (BC) : $\overrightarrow{PQ}(-2\,;4)$ et $\overrightarrow{BC}(-6\,;6)$ ont pour déterminant $-12+24=12\neq 0$, car les deux coefficients sont différents.

Réponse. $A_{APQ}=4$ contre 18 pour ABC, soit un rapport de $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : un parallélogramme et ses points remarquables

a) $ABCD$ est un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Avec $\overrightarrow{AB}(6\,;2)$: $x_C - 3 = 6$ et $y_C - 7 = 2$, donc $C(9\,;9)$. Le centre est le milieu de $[AC]$: $O(5\,;5)$, qui est aussi le milieu de $[BD]$.

b) $E\left(\dfrac{7+9}{2}\,;\dfrac{3+9}{2}\right) = (8\,;6)$ et $F\left(\dfrac{9+3}{2}\,;\dfrac{9+7}{2}\right) = (6\,;8)$.

c) $\overrightarrow{EF}(-2\,;2)$ et $\overrightarrow{BD}(-4\,;4)$: $\det = (-2)\times 4 - (-4)\times 2 = 0$. Donc $(EF) \parallel (BD)$, avec $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{EF}$: c’est le théorème des milieux dans le triangle BCD.

d) $AB = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$ et $AD = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$: deux côtés consécutifs égaux, le parallélogramme est un **losange**. Ses diagonales mesurent $AC = \sqrt{64+64} = 8\sqrt{2}$ et $BD = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$:

$$A_{ABCD} = \frac{AC \times BD}{2} = \frac{8\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}}{2} = 32$$

Le triangle BCD en est la moitié, d’aire 16. Le triangle CEF en est une réduction de rapport $\dfrac{1}{2}$ (puisque E et F sont des milieux), son aire est donc multipliée par $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$: $A_{CEF} = \dfrac{16}{4} = 4$.

Réponse. a) $C(9\,;9)$ et $O(5\,;5)$ · b) $E(8\,;6)$, $F(6\,;8)$ · c) $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{EF}$ · d) aire 32 pour $ABCD$ et 4 pour CEF.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).