

Plaquette 4 – Points à construire : symétriques, partages et équations vectorielles

Vecteurs du plan — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Deux méthodes pour un point défini par une relation.

Méthode	Quand l'utiliser
coordonnées et système	relation courte, coefficients simples
transformation par Chasles	plusieurs points, coefficients fractionnaires

Transformation type. Pour $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ avec $\alpha + \beta \neq 0$, on insère A :

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \implies (\alpha + \beta) \overrightarrow{MA} = -\beta \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$$

Symétriques.

Symétrie	Caractérisation	Coordonnées de l'image de $M(x; y)$
par rapport au point $I(a; b)$	I milieu de $[MM']$	$(2a - x; 2b - y)$
par rapport à l'axe des abscisses	—	$(x; -y)$
par rapport à l'axe des ordonnées	—	$(-x; y)$
par rapport à l'origine	—	$(-x; -y)$

Partage d'un segment. Le point M tel que $\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB}$ vérifie

$$M(x_A + k(x_B - x_A); y_A + k(y_B - y_A))$$

Valeur de k	Position de M
$k = 0$	en A
$0 < k < 1$	entre A et B
$k = \frac{1}{2}$	milieu de $[AB]$
$k = 1$	en B
$k > 1$	au-delà de B
$k < 0$	avant A

Contrôle systématique. Une fois M trouvé, on recalcule le vecteur de l'énoncé et l'on vérifie qu'il vaut bien ce qui était demandé.

Correction de l'exercice 1 – Symétrie par rapport à un point

- **Caractérisation** : I est le milieu de $[AA']$ ✓
- **Traduction** : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IA'}$ ✓
- **Calcul de $\overrightarrow{AI}$** : $(1 - 3; 4 + 2) = (-2; 6)$ ✓

— **Système** : $x_{A'} - 1 = -2$ et $y_{A'} - 4 = 6$ ✓

— **Résolution** :

$$A'(-1; 10)$$

— **Contrôle par la formule** : $(2 \times 1 - 3; 2 \times 4 + 2) = (-1; 10)$ ✓

— **Contrôle du milieu** : $\left(\frac{3-1}{2}; \frac{-2+10}{2}\right) = (1; 4) = I$ ✓

— **Longueurs** : $AI = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6,325$ ✓

— **Longueur** IA' : $\sqrt{4+36} = 2\sqrt{10}$ ✓

— **Contrôle** : $AI = IA'$ ✓

— **Longueur** AA' : $\sqrt{16+144} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \approx 12,649$ ✓

— **Contrôle** : $AA' = 2AI$ ✓

— **Symétrique de I par rapport à A** : $(2 \times 3 - 1; 2 \times (-2) - 4) = (5; -8)$ ✓

— **Remarque** : la symétrie centrale n'est pas commutative dans ses centres — les deux résultats diffèrent ✓

— **Vecteur** $\overrightarrow{AA'}$: $(-4; 12) = 2\overrightarrow{AI}$ ✓

Réponse. $A'(-1; 10)$.

Correction de l'exercice 2 - Trois symétries axiales

— **Par rapport à l'axe des abscisses** : on change le signe de l'ordonnée ✓

— **Résultat** : $M_1(-3; -5)$ ✓

— **Par rapport à l'axe des ordonnées** : on change le signe de l'abscisse ✓

— **Résultat** : $M_2(3; 5)$ ✓

— **Par rapport à l'origine** : on change les deux signes ✓

— **Résultat** : $M_3(3; -5)$ ✓

— **Contrôle du premier** : le milieu de $[MM_1]$ est $(-3; 0)$, bien sur l'axe des abscisses ✓

— **Contrôle du deuxième** : le milieu de $[MM_2]$ est $(0; 5)$, bien sur l'axe des ordonnées ✓

— **Contrôle du troisième** : le milieu de $[MM_3]$ est $(0; 0)$, l'origine ✓

— **Observation** : M_3 est aussi le symétrique de M_1 par rapport à l'axe des ordonnées ✓

— **Composition** : enchaîner les deux symétries axiales donne la symétrie centrale ✓

— **Contrôle** : de $M(-3; 5)$ à $M_1(-3; -5)$ puis à $(3; -5) = M_3$ ✓

— **Distances à l'origine** : toutes égales à $\sqrt{9+25} = \sqrt{34} \approx 5,831$ ✓

— **Explication** : les symétries conservent les distances ✓

— **Quadrilatère** $MM_1M_3M_2$: c'est un **rectangle** de côtés 6 et 10 ✓

— **Contrôle de son aire** : 60 ✓

Réponse. $M_1(-3; -5)$, $M_2(3; 5)$ et $M_3(3; -5)$.

Correction de l'exercice 3 - Partager un segment en trois

— **Vecteur** $\overrightarrow{AB}$: $(12; 9)$ ✓

— **Premier point** : $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (4; 3)$ ✓

— **Coordonnées** :

$$P(-4 + 4; 2 + 3) = (0; 5)$$

— **Second point** : $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = (8; 6)$ ✓

— **Coordonnées** :

$$Q(-4 + 8; 2 + 6) = (4; 8)$$

- **Vérification de $\overrightarrow{AP}$** : $(0 + 4 ; 5 - 2) = (4 ; 3) \checkmark$
- **Vérification de $\overrightarrow{PQ}$** : $(4 - 0 ; 8 - 5) = (4 ; 3) \checkmark$
- **Vérification de $\overrightarrow{QB}$** : $(8 - 4 ; 11 - 8) = (4 ; 3) \checkmark$
- **Conclusion** : les trois vecteurs sont **égaux**, le partage est bien régulier $\checkmark$
- **Longueur AB** : $\sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15 \checkmark$
- **Longueur de chaque part** : $\sqrt{16 + 9} = 5 \checkmark$
- **Contrôle** : $3 \times 5 = 15 \checkmark$
- **Milieu de $[AB]$** : $(2 ; 6,5) \checkmark$
- **Position** : il est entre P et Q , comme attendu $\checkmark$
- **Contrôle par la formule** : $\left(\frac{-4 + 8}{2} ; \frac{2 + 11}{2}\right) = (2 ; 6,5) \checkmark$

Réponse. $P(0 ; 5)$ et $Q(4 ; 8)$.

Correction de l'exercice 4 - Équation vectorielle à deux points

- **Méthode par Chasles** : on insère A dans $\overrightarrow{MB}$ $\checkmark$
- **Développement** : $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} \checkmark$
- **Équation** : $4\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AB} \checkmark$
- **Donc** :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

- **Calcul de $\overrightarrow{AB}$** : $(6 ; -6) \checkmark$
- **Calcul de $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$** : $(1,5 ; -1,5) \checkmark$
- **Coordonnées** :

$$M(3,5 ; 3,5)$$

- **Vérification par le calcul direct** : $\overrightarrow{MA} = (-1,5 ; 1,5) \checkmark$
- **Puis** : $\overrightarrow{MB} = (4,5 ; -4,5) \checkmark$
- **Somme** : $3(-1,5 ; 1,5) + (4,5 ; -4,5) = (-4,5 + 4,5 ; 4,5 - 4,5) = (0 ; 0) \checkmark$
- **Contrôle avec la formule générale** : $\overrightarrow{AM} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$ avec $\alpha = 3$ et $\beta = 1 \checkmark$
- **Détail** : $\frac{1}{3 + 1} = \frac{1}{4} \checkmark$
- **Position** : M est au **quart** de $[AB]$, donc plus proche de $A \checkmark$
- **Interprétation** : le coefficient le plus grand « attire » le point $\checkmark$
- **Cas symétrique** : avec $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, on trouverait $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, soit $(6,5 ; 0,5) \checkmark$

Réponse. $M(3,5 ; 3,5)$, situé au quart de $[AB]$ depuis A .

Correction de l'exercice 5 - Équation à trois points

- **Somme des coefficients** : $1 + 1 - 1 = 1 \neq 0$, le point existe et est unique $\checkmark$
- **Passage en coordonnées** : abscisse de la somme = $(0 - x) + (6 - x) - (3 - x) = 3 - x \checkmark$
- **Ordonnée** : $(2 - y) + (0 - y) - (7 - y) = -5 - y \checkmark$
- **Système** : $3 - x = 0$ et $-5 - y = 0 \checkmark$
- **Résolution** :

$$M(3 ; -5)$$

- **Vérification de l'abscisse** : $(0 - 3) + (6 - 3) - (3 - 3) = -3 + 3 - 0 = 0 \checkmark$

- **Vérification de l'ordonnée** : $(2 + 5) + (0 + 5) - (7 + 5) = 7 + 5 - 12 = 0$ ✓
 - **Interprétation géométrique** : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$ ✓
 - **Autre lecture** : M est tel que $\overrightarrow{MC}$ soit la diagonale du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ ✓
 - **Contrôle de cette lecture** : $\overrightarrow{MA} = (-3; 7)$ et $\overrightarrow{MB} = (3; 5)$ ✓
 - **Somme** : $(0; 12)$ ✓
 - **Et** : $\overrightarrow{MC} = (0; 12)$ ✓
 - **Méthode vectorielle** : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CB}$ ✓
 - **Donc** : $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CB}$, soit $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CB} = (3; -7)$ ✓
 - **Coordonnées** : $M(0 + 3; 2 - 7) = (3; -5)$ ✓
- Réponse.** $M(3; -5)$.

Correction de l'exercice 6 - Un système sans solution

- **Simplification de la première expression** : $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$ ✓
- **Observation clé** : le résultat **ne dépend pas** de M ✓
- **Calcul de $\overrightarrow{BA}$** : $(1 - 4; 1 - 5) = (-3; -4)$ ✓
- **Première équation** : $\overrightarrow{BA} = \vec{0}$, ce qui est **faux** ✓
- **Conclusion** : **aucun** point M ne convient ✓
- **Somme des coefficients** : $1 - 1 = 0$, ce qui explique l'échec ✓
- **Règle générale** : quand la somme des coefficients est nulle, l'expression est un vecteur **constant** ✓
- **Seconde équation** : $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}$ ✓
- **Traduction** : $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$, donc $2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ✓
- **Conséquence** : il faudrait $A = B$, ce qui est faux ✓
- **Conclusion** : **aucun** point non plus ✓
- **Cas où il y aurait des solutions** : $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$ ✓
- **Alors** : l'égalité est vraie pour **tout** point M du plan ✓
- **Bilan des trois cas** : aucune solution, aucune solution, tous les points ✓
- **Leçon de méthode** : avant de se lancer dans un système, on **simplifie** l'expression vectorielle ✓
- **Test rapide à faire** : calculer la somme des coefficients — si elle est nulle, l'expression est constante ✓

Réponse. Aucun point dans les deux cas : $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$ ne dépend pas de M et vaut $(-3; -4) \neq \vec{0}$.

Correction de l'exercice 7 - Barycentre pondéré

- **Somme des coefficients** : $2 + 3 = 5 \neq 0$ ✓
- **Formule** : $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ ✓
- **Calcul de $\overrightarrow{AB}$** : $(6; 9)$ ✓
- **Calcul de $\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$** : $(3,6; 5,4)$ ✓
- **Coordonnées** :

$$G(-2 + 3,6; 0 + 5,4) = (1,6; 5,4)$$
- **Vérification** : $\overrightarrow{GA} = (-3,6; -5,4)$ ✓
- **Puis** : $\overrightarrow{GB} = (2,4; 3,6)$ ✓

- **Abscisse de la somme** : $2 \times (-3,6) + 3 \times 2,4 = -7,2 + 7,2 = 0 \checkmark$
- **Ordonnée** : $2 \times (-5,4) + 3 \times 3,6 = -10,8 + 10,8 = 0 \checkmark$
- **Rapport demandé** :

$$\frac{AG}{AB} = \frac{3}{5} = 0,6$$

- **Contrôle par les longueurs** : $AB = \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13} \approx 10,817 \checkmark$
- **Longueur AG** : $\sqrt{12,96 + 29,16} = \sqrt{42,12} \approx 6,490 \checkmark$
- **Contrôle** : $\frac{6,490}{10,817} \approx 0,600 \checkmark$
- **Lecture du résultat** : G est plus proche de B , qui porte le coefficient le plus grand $\checkmark$
- **Rapport complémentaire** : $\frac{GB}{AB} = \frac{2}{5} = 0,4 \checkmark$

Réponse. $G(1,6; 5,4)$ et $\frac{AG}{AB} = \frac{3}{5}$.

Correction de l'exercice 8 - Reconstituer un triangle

- **Formule du centre de gravité** : $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \checkmark$
- **Équation des abscisses** : $2 = \frac{1 + 7 + x_C}{3} \checkmark$
- **Résolution** : $6 = 8 + x_C$, donc $x_C = -2 \checkmark$
- **Équation des ordonnées** : $3 = \frac{-2 + 4 + y_C}{3} \checkmark$
- **Résolution** : $9 = 2 + y_C$, donc $y_C = 7 \checkmark$
- **Donc** :

$$C(-2; 7)$$

- **Vérification des abscisses** : $\frac{1 + 7 - 2}{3} = \frac{6}{3} = 2 \checkmark$
- **Vérification des ordonnées** : $\frac{-2 + 4 + 7}{3} = \frac{9}{3} = 3 \checkmark$
- **Contrôle par la relation vectorielle** : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \checkmark$
- **Calculs** : $\overrightarrow{GA} = (-1; -5)$, $\overrightarrow{GB} = (5; 1)$, $\overrightarrow{GC} = (-4; 4) \checkmark$
- **Somme** : $(-1 + 5 - 4; -5 + 1 + 4) = (0; 0) \checkmark$
- **Contrôle par une médiane** : le milieu de $[AB]$ est $(4; 1) \checkmark$
- **Vecteur $\overrightarrow{CG}$** : $(4; -4) \checkmark$
- **Vecteur de C vers ce milieu** : $(4 - (-2); 1 - 7) = (6; -6) \checkmark$
- **Contrôle** : $\frac{2}{3}(6; -6) = (4; -4) = \overrightarrow{CG} \checkmark$
- **Aire du triangle** : $\overrightarrow{AB} = (6; 6)$ et $\overrightarrow{AC} = (-3; 9)$, de déterminant $54 + 18 = 72$, soit une aire de $36 \checkmark$

Réponse. $C(-2; 7)$.

Correction de l'exercice 9 - Un point du plan par deux conditions

- **Calcul de $\overrightarrow{AB}$** : $(4; 0) \checkmark$
- **Calcul de $\overrightarrow{AC}$** : $(0; 3) \checkmark$
- **Calcul de $2\overrightarrow{AB}$** : $(8; 0) \checkmark$
- **Différence** : $(8 - 0; 0 - 3) = (8; -3) \checkmark$
- **Comme A est l'origine** : les coordonnées de M sont celles du vecteur $\checkmark$
- **Donc** :

$$M(8; -3)$$

- **Vérification** : $\overrightarrow{AM} = (8; -3)$ ✓
- **Test d'appartenance** à (BC) : on calcule $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BM}$ ✓
- **Calcul de $\overrightarrow{BC}$** : $(-4; 3)$ ✓
- **Calcul de $\overrightarrow{BM}$** : $(8 - 4; -3 - 0) = (4; -3)$ ✓
- **Déterminant** : $(-4) \times (-3) - 4 \times 3 = 12 - 12 = 0$ ✓
- **Conclusion** : $M \in (BC)$ ✓
- **Coefficient** : $\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{BC}$ ✓
- **Position** : M est le symétrique de C par rapport à B ✓
- **Contrôle** : le milieu de $[CM]$ est $\left(\frac{0+8}{2}; \frac{3-3}{2}\right) = (4; 0) = B$ ✓
- **Équation de (BC)** : pente $\frac{3-0}{0-4} = -\frac{3}{4}$, donc $y = -\frac{3}{4}x + 3$ ✓
- **Contrôle en $x = 8$** : $-6 + 3 = -3$ ✓

Réponse. $M(8; -3)$, et oui : $M \in (BC)$ (c'est le symétrique de C par rapport à B).

Correction de l'exercice 10 - Coordonnées dans un repère non standard

- **Origine du repère** : le point A , de coordonnées $(0; 0)$ ✓
- **Premier vecteur de base** : $\overrightarrow{AB}$, donc $B(1; 0)$ ✓
- **Second vecteur de base** : $\overrightarrow{AD}$, donc $D(0; 1)$ ✓
- **Pour C** : on utilise $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ✓
- **Donc** : $C(1; 1)$ ✓
- **Centre O** : milieu de $[AC]$ ✓
- **Coordonnées** :

$$O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

- **Contrôle par l'autre diagonale** : milieu de $[BD]$, soit $\left(\frac{1+0}{2}; \frac{0+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ✓
- **Milieu de $[BC]$** : $\left(1; \frac{1}{2}\right)$ ✓
- **Milieu de $[DC]$** : $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ ✓
- **Avantage de ce repère** : les coordonnées sont **très simples**, sans calcul de longueur ✓
- **Ce qu'on perd** : les distances ne se calculent plus par $\sqrt{x^2 + y^2}$, car le repère n'est pas orthonormé ✓
- **Coordonnées de $\overrightarrow{BD}$** : $(0 - 1; 1 - 0) = (-1; 1)$ ✓
- **Coordonnées de $\overrightarrow{AC}$** : $(1; 1)$ ✓
- **Déterminant** : $1 \times 1 - (-1) \times 1 = 2 \neq 0$ ✓
- **Conclusion** : les diagonales ne sont pas parallèles — heureusement, elles se coupent en O ✓

Réponse. $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C(1; 1)$, $D(0; 1)$ et $O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Correction de l'exercice 11 - Point d'intersection de deux médianes

- **Milieu de $[BC]$** : $A' = \left(\frac{8+5}{2}; \frac{3+11}{2}\right) = (6,5; 7)$ ✓
- **Milieu de $[AC]$** : $B' = \left(\frac{2+5}{2}; \frac{1+11}{2}\right) = (3,5; 6)$ ✓

- **Médiane issue de A** : droite (AA') , de vecteur directeur $(4,5; 6)$ ✓
- **Pente** : $\frac{6}{4,5} = \frac{4}{3}$ ✓
- **Équation** : $y = \frac{4}{3}(x - 2) + 1 = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$ ✓
- **Contrôle en A** : $\frac{8}{3} - \frac{5}{3} = 1$ ✓
- **Médiane issue de B** : droite (BB') , de vecteur directeur $(-4,5; 3)$ ✓
- **Pente** : $\frac{3}{-4,5} = -\frac{2}{3}$ ✓
- **Équation** : $y = -\frac{2}{3}(x - 8) + 3 = -\frac{2}{3}x + \frac{25}{3}$ ✓
- **Contrôle en B** : $-\frac{16}{3} + \frac{25}{3} = 3$ ✓
- **Système** : $\frac{4}{3}x - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}x + \frac{25}{3}$ ✓
- **Résolution** : $2x = 10$, donc $x = 5$ ✓
- **Ordonnée** : $y = \frac{20}{3} - \frac{5}{3} = 5$ ✓
- **Point d'intersection** :

$$G(5; 5)$$

- **Contrôle par la formule du centre de gravité** : $\left(\frac{2+8+5}{3}; \frac{1+3+11}{3}\right) = (5; 5)$ ✓
 - **Conclusion** : c'est bien le centre de gravité ✓
- Réponse.** $G(5; 5)$, qui vérifie bien $\left(\frac{2+8+5}{3}; \frac{1+3+11}{3}\right)$.

Correction de l'exercice 12 - Translation d'un vecteur inconnu

- **Vecteur de la translation** : $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$ ✓
- **Calcul** : $(-2 - 3; 4 + 1) = (-5; 5)$ ✓
- **Donc** :

$$\vec{u}(-5; 5)$$

- **Image de B** : on ajoute $\vec{u}$ ✓
 - **Calcul** : $B'(7 - 5; 2 + 5) = (2; 7)$ ✓
 - **Vérification** : $\overrightarrow{BB'} = (-5; 5) = \vec{u}$ ✓
 - **Antécédent de C** : on cherche D tel que $\overrightarrow{DC} = \vec{u}$ ✓
 - **Système** : $0 - x_D = -5$ et $0 - y_D = 5$ ✓
 - **Résolution** : $D(5; -5)$ ✓
 - **Vérification** : $\overrightarrow{DC} = (0 - 5; 0 + 5) = (-5; 5)$ ✓
 - **Méthode générale pour un antécédent** : on retire le vecteur ✓
 - **Contrôle** : $(0 - (-5); 0 - 5) = (5; -5)$ ✓
 - **Contrôle de conservation** : $\overrightarrow{AB} = (4; 3)$ ✓
 - **Et** : $\overrightarrow{A'B'} = (2 + 2; 7 - 4) = (4; 3)$ ✓
 - **Longueur conservée** : $AB = A'B' = \sqrt{16 + 9} = 5$ ✓
 - **Remarque** : la translation de vecteur $-\vec{u}(5; -5)$ est la transformation **réciroque** ✓
- Réponse.** $\vec{u}(-5; 5)$; $B'(2; 7)$ et l'antécédent de C est $D(5; -5)$.

Correction de l'exercice 13 – Deux relations simultanées

— Calcul de $\overrightarrow{AB}$: $(4; 8)$ ✓

— Calcul de $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$: $(1; 2)$ ✓

— Coordonnées de M :

$$M(1 + 1; 0 + 2) = (2; 2)$$

— Calcul de $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$: $(2; 4)$ ✓

— Coordonnées de N :

$$N(2 + 2; 2 + 4) = (4; 6)$$

— Vérification de $\overrightarrow{AM}$: $(1; 2)$ ✓

— Vérification de $\overrightarrow{MN}$: $(4 - 2; 6 - 2) = (2; 4)$ ✓

— Position de N sur $[AB]$: $\overrightarrow{AN} = (3; 6) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ ✓

— Contrôle : $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ ✓

— Cohérence : N est aux trois quarts de $[AB]$ ✓

— Longueur AB : $\sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \approx 8,944$ ✓

— Longueur AM : $\sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \approx 2,236$ ✓

— Contrôle : $\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{4}$ ✓

— Longueur MN : $\sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4,472$ ✓

— Contrôle : $\frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$ ✓

— Segment restant : $\overrightarrow{NB} = (1; 2) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, donc $[AB]$ est partagé en $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ ✓

Réponse. $M(2; 2)$ et $N(4; 6)$.

Correction de l'exercice 14 – Un point équidistant

— Forme du point cherché : $M(x; 0)$ ✓

— Carré de la distance MA : $(-1 - x)^2 + (2 - 0)^2 = (x + 1)^2 + 4$ ✓

— Carré de la distance MB : $(5 - x)^2 + (6 - 0)^2 = (5 - x)^2 + 36$ ✓

— Équation : $(x + 1)^2 + 4 = (5 - x)^2 + 36$ ✓

— Développement du membre de gauche : $x^2 + 2x + 1 + 4 = x^2 + 2x + 5$ ✓

— Développement du membre de droite : $25 - 10x + x^2 + 36 = x^2 - 10x + 61$ ✓

— Simplification : $2x + 5 = -10x + 61$ ✓

— Résolution : $12x = 56$, donc $x = \frac{14}{3}$ ✓

— Donc :

$$M\left(\frac{14}{3}; 0\right)$$

— Valeur approchée : $M \approx (4,667; 0)$ ✓

— Vérification de MA^2 : $\left(\frac{14}{3} + 1\right)^2 + 4 = \frac{289}{9} + 4 = \frac{325}{9}$ ✓

— Vérification de MB^2 : $\left(5 - \frac{14}{3}\right)^2 + 36 = \frac{1}{9} + 36 = \frac{325}{9}$ ✓

— Contrôle : les deux carrés sont égaux ✓

- **Distance commune** : $\sqrt{\frac{325}{9}} = \frac{5\sqrt{13}}{3} \approx 6,009 \checkmark$
- **Interprétation** : M est l'intersection de la **médiatrice** de $[AB]$ avec l'axe des abscisses $\checkmark$
- **Contrôle par le milieu** : le milieu de $[AB]$ est $(2; 4)$, et la médiatrice a pour pente $-\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \checkmark$

Réponse. $M\left(\frac{14}{3}; 0\right) \approx (4,667; 0)$.

Correction de l'exercice 15 - Points construits sur les côtés

- **Coordonnées de P** : $\frac{1}{3}(6; 0) = (2; 0) \checkmark$
- **Coordonnées de Q** : $\frac{2}{3}(0; 6) = (0; 4) \checkmark$
- **Aire de ABC** : $\frac{6 \times 6}{2} = 18 \checkmark$
- **Aire de APQ** : les deux côtés sont sur les axes $\checkmark$
- **Calcul** :

$$A_{APQ} = \frac{2 \times 4}{2} = 4$$
- **Rapport** : $\frac{4}{18} = \frac{2}{9} \approx 0,222 \checkmark$
- **Contrôle par les coefficients** : $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \checkmark$
- **Règle générale** : l'aire est multipliée par le **produit** des deux coefficients $\checkmark$
- **Contrôle par le déterminant** : $\overrightarrow{AP} = (2; 0)$ et $\overrightarrow{AQ} = (0; 4)$, de déterminant 8 $\checkmark$
- **Aire** : $\frac{8}{2} = 4 \checkmark$
- **Contrôle pour ABC** : $\overrightarrow{AB} = (6; 0)$ et $\overrightarrow{AC} = (0; 6)$, de déterminant 36, soit une aire de 18 $\checkmark$
- **Rapport des déterminants** : $\frac{8}{36} = \frac{2}{9} \checkmark$
- **Longueur PQ** : $\sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4,472 \checkmark$
- **Longueur BC** : $\sqrt{36 + 36} = 6\sqrt{2} \approx 8,485 \checkmark$
- **Test de parallélisme de (PQ) et (BC)** : $\overrightarrow{PQ} = (-2; 4)$ et $\overrightarrow{BC} = (-6; 6)$, de déterminant $-12 + 24 = 12 \neq 0 \checkmark$
- **Conclusion** : (PQ) **n'est pas** parallèle à (BC) , les coefficients étant différents $\checkmark$

Réponse. $A_{APQ} = 4$ contre 18 pour ABC , soit un rapport de $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un parallélogramme et ses points remarquables

- a) **Condition** : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \checkmark$
- **Calcul de $\overrightarrow{AB}$** : $(6; 2) \checkmark$
 - **Système** : $x_C - 3 = 6$ et $y_C - 7 = 2 \checkmark$
 - **Résolution** :

$$C(9; 9)$$

- **Vérification** : $\overrightarrow{DC} = (9 - 3; 9 - 7) = (6; 2) \checkmark$
- **Centre** : milieu de $[AC]$, soit $O\left(\frac{1+9}{2}; \frac{1+9}{2}\right) = (5; 5) \checkmark$

— **Contrôle par l'autre diagonale** : milieu de $[BD]$, soit $\left(\frac{7+3}{2}; \frac{3+7}{2}\right) = (5; 5) \checkmark$

b) **Milieu E de $[BC]$** : $\left(\frac{7+9}{2}; \frac{3+9}{2}\right) = (8; 6) \checkmark$

— **Milieu F de $[CD]$** : $\left(\frac{9+3}{2}; \frac{9+7}{2}\right) = (6; 8) \checkmark$

c) **Vecteur $\overrightarrow{EF}$** : $(6-8; 8-6) = (-2; 2) \checkmark$

— **Vecteur $\overrightarrow{BD}$** : $(3-7; 7-3) = (-4; 4) \checkmark$

— **Déterminant** :

$$(-2) \times 4 - (-4) \times 2 = -8 + 8 = 0$$

— **Conclusion** : $(EF) \parallel (BD) \checkmark$

— **Coefficient** : $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{EF} \checkmark$

— **Nom du résultat** : théorème des milieux dans le triangle $BCD \checkmark$

— **Longueurs** : $EF = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \approx 2,828$ et $BD = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2} \approx 5,657 \checkmark$

— **Contrôle** : $BD = 2EF \checkmark$

d) **Aire du parallélogramme** : c'est la valeur absolue du déterminant de deux côtés consécutifs $\checkmark$

— **Vecteurs** : $\overrightarrow{AB} = (6; 2)$ et $\overrightarrow{AD} = (2; 6) \checkmark$

— **Déterminant** : $6 \times 6 - 2 \times 2 = 36 - 4 = 32 \checkmark$

— **Aire** :

$$A_{ABCD} = 32 \text{ unités d'aire}$$

— **Contrôle par les triangles** : le parallélogramme est formé de deux triangles d'aire 16 $\checkmark$

— **Détail** : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC} = (8; 8)$ donnent un déterminant de $48 - 16 = 32$, soit une aire de 16 pour $ABC \checkmark$

— **Aire de CEF** : $\overrightarrow{CE} = (-1; -3)$ et $\overrightarrow{CF} = (-3; -1) \checkmark$

— **Déterminant** : $(-1) \times (-1) - (-3) \times (-3) = 1 - 9 = -8 \checkmark$

— **Aire** :

$$A_{CEF} = \frac{|-8|}{2} = 4$$

— **Rapport à l'aire de BCD** : ce triangle a pour aire 16, donc le rapport vaut $\frac{4}{16} = \frac{1}{4} \checkmark$

— **Explication** : E et F étant les milieux, le triangle CEF a des côtés deux fois plus courts, donc une aire **quatre fois** plus petite $\checkmark$

— **Contrôle final** : $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ de l'aire du parallélogramme $\checkmark$

Réponse. a) $C(9; 9)$ et $O(5; 5)$ · b) $E(8; 6)$, $F(6; 8)$ · c) $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{EF}$ · d) aire 32 pour $ABCD$ et 4 pour CEF .