

Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : figures, aires et démonstrations

Vecteurs du plan — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Boîte à outils complète.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \quad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = xy' - x'y \quad A_{ABC} = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})|$$

Reconnaître un quadrilatère ABCD — dans cet ordre.

Ce qu'on vérifie	Ce qu'on obtient
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$	parallélogramme
$ + AB = AD$	losange
$ + \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ perpendiculaires	rectangle
losange et rectangle	carré
$\overrightarrow{AB}$ colinéaire à $\overrightarrow{DC}$ sans égalité	trapèze

Perpendicularité en Seconde. On teste $xx' + yy' = 0$ pour $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$: c'est le critère du produit scalaire, admis ici comme un test de calcul.

Aire d'un parallélogramme. C'est la valeur absolue du déterminant de deux côtés consécutifs — donc le **double** de l'aire du triangle correspondant.

Trois réflexes de rédaction.

- Toujours écrire les coordonnées des vecteurs **avant** de conclure.
- Une conclusion se rédige en français : « le déterminant est nul, **donc** les vecteurs sont colinéaires, **donc** les points sont alignés ».
- Un contrôle numérique indépendant (longueur, milieu, autre déterminant) vaut mieux qu'une relecture.

Correction de l'exercice 1 – Nature d'un quadrilatère

- Vecteur $\overrightarrow{AB}$: $(4; -3)$ ✓
- Vecteur $\overrightarrow{DC}$: $(8 - 4; 3 - 6) = (4; -3)$ ✓
- Égalité : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ✓
- Première conclusion : ABCD est un **parallélogramme** ✓
- Longueur AB : $\sqrt{16 + 9} = 5$ ✓
- Vecteur $\overrightarrow{AD}$: $(3; 4)$ ✓
- Longueur AD : $\sqrt{9 + 16} = 5$ ✓
- Égalité des côtés : $AB = AD = 5$, c'est un **losange** ✓
- Test de perpendicularité : $4 \times 3 + (-3) \times 4 = 12 - 12 = 0$ ✓
- Conclusion : les côtés consécutifs sont perpendiculaires ✓
- Nature finale : ABCD est un **carré** de côté 5 ✓

- **Aire** : $5^2 = 25$ ✓
- **Contrôle par le déterminant** : $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = 4 \times 4 - 3 \times (-3) = 16 + 9 = 25$ ✓
- **Diagonales** : $\overrightarrow{AC} = (7; 1)$ et $\overrightarrow{BD} = (-1; 7)$ ✓
- **Longueurs** : $AC = BD = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7,071$ ✓
- **Perpendicularité des diagonales** : $7 \times (-1) + 1 \times 7 = 0$ ✓
- **Cohérence** : diagonales égales et perpendiculaires, c'est bien la signature du carré ✓

Réponse. Un **carré** de côté 5 et d'aire 25.

Correction de l'exercice 2 - Trapèze rectangle

- **Vecteur $\overrightarrow{AB}$** : $(10; 0)$ ✓
- **Vecteur $\overrightarrow{DC}$** : $(7; 0)$ ✓
- **Déterminant** : $10 \times 0 - 7 \times 0 = 0$ ✓
- **Conclusion** : $(AB) \parallel (DC)$ ✓
- **Mais** : $10 \neq 7$, ce n'est pas un parallélogramme ✓
- **Nature** : un **trapèze** ✓
- **Vecteur $\overrightarrow{AD}$** : $(0; 4)$ ✓
- **Test de perpendicularité avec $\overrightarrow{AB}$** : $10 \times 0 + 0 \times 4 = 0$ ✓
- **Précision** : c'est un trapèze **rectangle** en A et en D ✓
- **Bases** : $AB = 10$ et $DC = 7$ ✓
- **Hauteur** : $AD = 4$ ✓
- **Aire** :

$$A = \frac{(10 + 7) \times 4}{2} = \frac{68}{2} = 34$$

- **Contrôle par découpage** : un rectangle 7×4 (aire 28) plus un triangle de base 3 et hauteur 4 (aire 6) ✓
- **Contrôle** : $28 + 6 = 34$ ✓
- **Quatrième côté** : $\overrightarrow{BC} = (-3; 4)$, de longueur 5 ✓
- **Périmètre** : $10 + 5 + 7 + 4 = 26$ ✓
- **Contrôle du non-isocèle** : $AD = 4 \neq 5 = BC$ ✓

Réponse. Un **trapèze rectangle** d'aire $\frac{(10 + 7) \times 4}{2} = 34$.

Correction de l'exercice 3 - Alignement de trois points construits

- **Milieu I** : $(3; 0)$ ✓
- **Centre de gravité** : $G\left(\frac{0+6+0}{3}; \frac{0+0+9}{3}\right) = (2; 3)$ ✓
- **Milieu J** : $\left(\frac{6+0}{2}; \frac{0+9}{2}\right) = (3; 4,5)$ ✓
- **Vecteur $\overrightarrow{IG}$** : $(2 - 3; 3 - 0) = (-1; 3)$ ✓
- **Vecteur $\overrightarrow{IC}$** : $(0 - 3; 9 - 0) = (-3; 9)$ ✓
- **Déterminant** :

$$(-1) \times 9 - (-3) \times 3 = -9 + 9 = 0$$

- **Conclusion** : I, G et C sont **alignés** ✓
- **Explication** : (IC) est la **médiane** issue de C, et G est sur toutes les médianes ✓
- **Coefficient** : $\overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IG}$ ✓

- **Autre lecture** : $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CI} \checkmark$
- **Contrôle** : $\overrightarrow{CI} = (3; -9)$ et $\frac{2}{3}(3; -9) = (2; -6) \checkmark$
- **Contrôle** : $\overrightarrow{CG} = (2 - 0; 3 - 9) = (2; -6) \checkmark$
- **Contrôle sur la médiane issue de A** : $\overrightarrow{AJ} = (3; 4,5)$ et $\overrightarrow{AG} = (2; 3) \checkmark$
- **Déterminant** : $3 \times 3 - 2 \times 4,5 = 9 - 9 = 0 \checkmark$
- **Conclusion** : G est aussi sur cette médiane $\checkmark$
- **Aire du triangle** : $\frac{6 \times 9}{2} = 27 \checkmark$

Réponse. Oui : $\det(\overrightarrow{IG}; \overrightarrow{IC}) = 0$, car (IC) est la médiane issue de C et G y appartient.

Correction de l'exercice 4 - Aires et rapport de partage

- **Coordonnées de M** : $\frac{1}{4}(8; 0) = (2; 0) \checkmark$
- **Aire de ABC** : $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 8 \times 6 - 2 \times 0 = 48 \checkmark$
- **Donc** : $A_{ABC} = \frac{48}{2} = 24 \checkmark$
- **Aire de AMC** : $\overrightarrow{AM} = (2; 0)$ et $\overrightarrow{AC} = (2; 6) \checkmark$
- **Déterminant** : $2 \times 6 - 2 \times 0 = 12 \checkmark$
- **Aire** :

$$A_{AMC} = \frac{12}{2} = 6$$

- **Aire de MBC** : $\overrightarrow{MB} = (6; 0)$ et $\overrightarrow{MC} = (0; 6) \checkmark$
- **Déterminant** : $6 \times 6 - 0 \times 0 = 36 \checkmark$
- **Aire** :

$$A_{MBC} = \frac{36}{2} = 18$$

- **Contrôle de la somme** : $6 + 18 = 24 = A_{ABC} \checkmark$
- **Rapport** : $\frac{6}{18} = \frac{1}{3} \checkmark$
- **Explication** : les deux triangles ont la **même hauteur** (celle issue de C) $\checkmark$
- **Conséquence** : le rapport des aires est celui des bases, soit $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \checkmark$
- **Cohérence** : $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{4}$, donc $\frac{MB}{AB} = \frac{3}{4} \checkmark$
- **Contrôle** : $\frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3} \checkmark$
- **Règle générale** : un point qui partage la base dans le rapport k partage l'aire dans le même rapport $\checkmark$

Réponse. $A_{AMC} = 6$ et $A_{MBC} = 18$: le rapport $\frac{1}{3}$ est celui des bases.

Correction de l'exercice 5 - Deux parallélogrammes emboîtés

- **Vecteur $\overrightarrow{AB}$** : $(6; 2) \checkmark$
- **Vecteur $\overrightarrow{DC}$** : $(6 - 0; 7 - 5) = (6; 2) \checkmark$
- **Égalité** : $ABCD$ est un **parallélogramme** $\checkmark$
- **Milieu de $[AB]$** : $P = (2; 1) \checkmark$
- **Milieu de $[BC]$** : $Q = (5,5; 4,5) \checkmark$
- **Milieu de $[CD]$** : $R = (3; 6) \checkmark$

- **Milieu de $[DA]$** : $S = (-0,5; 2,5)$ ✓
- **Vecteur $\overrightarrow{PQ}$** : $(3,5; 3,5)$ ✓
- **Vecteur $\overrightarrow{SR}$** : $(3 - (-0,5); 6 - 2,5) = (3,5; 3,5)$ ✓
- **Égalité** : $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ ✓
- **Conclusion** : $PQRS$ est aussi un **parallélogramme** ✓
- **Nom du résultat** : c'est le **parallélogramme de Varignon** ✓
- **Propriété plus forte** : cette conclusion vaut pour **tout** quadrilatère, même non convexe ✓
- **Justification vectorielle** : $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ✓
- **Contrôle** : $\overrightarrow{AC} = (7; 7)$, et $\frac{1}{2}(7; 7) = (3,5; 3,5)$ ✓
- **Aire de $ABCD$** : $|\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})|$ avec $\overrightarrow{AD} = (1; 5)$, soit $|30 - 2| = 28$ ✓
- **Aire de $PQRS$** : $\overrightarrow{PQ} = (3,5; 3,5)$ et $\overrightarrow{PS} = (-2,5; 1,5)$, de déterminant $5,25 + 8,75 = 14$ ✓
- **Rapport** : $\frac{14}{28} = \frac{1}{2}$, le parallélogramme de Varignon a toujours la **moitié** de l'aire ✓

Réponse. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (6; 2)$, et $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = (3,5; 3,5)$: les deux sont des parallélogrammes.

Correction de l'exercice 6 - Point d'intersection de deux droites

- **Vecteur $\overrightarrow{AB}$** : $(6; 3)$ ✓
- **Vecteur $\overrightarrow{CD}$** : $(4; -8)$ ✓
- **Déterminant** : $6 \times (-8) - 4 \times 3 = -48 - 12 = -60 \neq 0$ ✓
- **Conclusion** : les droites sont **sécantes** ✓
- **Équation de (AB)** : pente $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ✓
- **Ordonnée à l'origine** : $1 = \frac{1}{2} \times (-2) + b$, donc $b = 2$ ✓
- **Donc** : $y = \frac{1}{2}x + 2$ ✓
- **Équation de (CD)** : pente $\frac{-1-7}{5-1} = -2$ ✓
- **Ordonnée à l'origine** : $7 = -2 \times 1 + b$, donc $b = 9$ ✓
- **Donc** : $y = -2x + 9$ ✓
- **Système** : $\frac{1}{2}x + 2 = -2x + 9$ ✓
- **Résolution** : $\frac{5}{2}x = 7$, donc $x = \frac{14}{5} = 2,8$ ✓
- **Ordonnée** : $y = -5,6 + 9 = 3,4$ ✓
- **Point d'intersection** :

$$E(2,8; 3,4)$$

- **Contrôle sur (AB)** : $\frac{2,8}{2} + 2 = 1,4 + 2 = 3,4$ ✓
- **Contrôle de l'alignement** : $\overrightarrow{AE} = (4,8; 2,4)$ et $\det$ avec $\overrightarrow{AB}$ vaut $4,8 \times 3 - 6 \times 2,4 = 14,4 - 14,4 = 0$ ✓
- **Position** : $\overrightarrow{AE} = 0,8\overrightarrow{AB}$, donc E est entre A et B ✓

Réponse. $E(2,8; 3,4)$, situé entre A et B ($\overrightarrow{AE} = 0,8\overrightarrow{AB}$).

Correction de l'exercice 7 - Triangle rectangle et cercle

- Vecteur $\overrightarrow{CA}$: $(-3; -3)$ ✓
- Vecteur $\overrightarrow{CB}$: $(3; -3)$ ✓
- Test de perpendicularité : $(-3) \times 3 + (-3) \times (-3) = -9 + 9 = 0$ ✓
- Conclusion : le triangle est **rectangle en C** ✓
- Centre du cercle de diamètre $[AB]$: le milieu $O = (0; 0)$ ✓
- Rayon : $\frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3$ ✓
- Distance OC : $\sqrt{0+9} = 3$ ✓
- Conclusion : $OC = 3 = \text{rayon}$, donc C est **sur** le cercle ✓
- Théorème invoqué : un triangle inscrit dans un cercle et dont un côté est un diamètre est rectangle ✓
- Réciproque également vraie : elle explique l'équivalence des deux résultats ✓
- Longueurs des côtés : $CA = CB = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4,243$ ✓
- Précision : le triangle est **rectangle isocèle** en C ✓
- Contrôle par Pythagore : $18 + 18 = 36 = AB^2$ ✓
- Aire : $\frac{3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}{2} = \frac{18}{2} = 9$ ✓
- Contrôle par base et hauteur : base $AB = 6$ et hauteur 3 , donc aire 9 ✓
- Contrôle par le déterminant : $\overrightarrow{AB} = (6; 0)$ et $\overrightarrow{AC} = (3; 3)$, de déterminant 18 , soit une aire de 9 ✓

Réponse. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ donc rectangle en C ; et $OC = 3 = \frac{AB}{2}$ donc C est sur le cercle de diamètre $[AB]$.

Correction de l'exercice 8 - Un losange à compléter

- Longueur AC : $\sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$ ✓
- Centre du losange : milieu de $[AC]$, soit $O = (4; 3)$ ✓
- Propriété : les diagonales d'un losange sont **perpendiculaires** et se coupent en leur milieu ✓
- Direction de $[AC]$: $\overrightarrow{AC} = (8; 6)$, soit $(4; 3)$ après simplification ✓
- Direction perpendiculaire : $(-3; 4)$, car $4 \times (-3) + 3 \times 4 = 0$ ✓
- Norme de ce vecteur : $\sqrt{9 + 16} = 5$ ✓
- Demi-diagonale BD : $\frac{10}{2} = 5$ ✓
- Donc : $\overrightarrow{OB} = (-3; 4)$ et $\overrightarrow{OD} = (3; -4)$ ✓
- Coordonnées :

$$B(4 - 3; 3 + 4) = (1; 7) \quad D(4 + 3; 3 - 4) = (7; -1)$$
- Vérification de BD : $\overrightarrow{BD} = (6; -8)$, de longueur $\sqrt{36 + 64} = 10$ ✓
- Vérification du milieu : $\left(\frac{1+7}{2}; \frac{7-1}{2}\right) = (4; 3) = O$ ✓
- Vérification de la perpendicularité : $8 \times 6 + 6 \times (-8) = 48 - 48 = 0$ ✓
- Longueur des côtés : $AB = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7,071$ ✓
- Contrôle : $AD = \sqrt{49 + 1} = 5\sqrt{2}$ ✓
- Cohérence du losange : les quatre côtés valent $5\sqrt{2}$ ✓
- Aire : $\frac{10 \times 10}{2} = 50$ ✓
- Contrôle : les diagonales étant égales, c'est en fait un **carré** de côté $5\sqrt{2}$, d'aire 50 ✓

Réponse. $B(1; 7)$ et $D(7; -1)$ — les diagonales valant toutes deux 10, c'est même un carré d'aire 50.

Correction de l'exercice 9 - Démonstration générale : milieux d'un quadrilatère

- **Objectif** : montrer que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ ✓
- **Décomposition de $\overrightarrow{PQ}$** : $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ}$ ✓
- **Substitutions** : $\overrightarrow{PB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ ✓
- **Donc** :

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

- **Décomposition de $\overrightarrow{SR}$** : $\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR}$ ✓
- **Substitutions** : $\overrightarrow{SD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ ✓
- **Donc** :

$$\overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

- **Comparaison** : les deux vecteurs valent $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ✓
- **Conclusion** : $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$, donc $PQRS$ est un parallélogramme ✓
- **Force de la démonstration** : elle n'utilise **aucune** hypothèse sur $ABCD$ ✓
- **Cas dégénérés** : elle reste valable si $ABCD$ est croisé ou non convexe ✓
- **Résultat analogue sur l'autre paire** : $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ ✓
- **Contrôle** : cela confirme le parallélogramme par les deux paires de côtés ✓
- **Conséquence sur les longueurs** : $PQ = \frac{AC}{2}$ et $QR = \frac{BD}{2}$ ✓
- **Cas particulier** : si les diagonales de $ABCD$ sont perpendiculaires, $PQRS$ est un rectangle ✓
- **Autre cas particulier** : si les diagonales sont de même longueur, $PQRS$ est un losange ✓

Réponse. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{SR}$, donc $PQRS$ est un parallélogramme — pour tout quadrilatère $ABCD$.

Correction de l'exercice 10 - Un point à l'intérieur du triangle

- **Aire du triangle ABC** : $\frac{6 \times 8}{2} = 24$ ✓
- **Aire de MAB** : base $AB = 6$, hauteur 3 (l'ordonnée de M) ✓
- **Calcul** : $\frac{6 \times 3}{2} = 9$ ✓
- **Aire de MAC** : base $AC = 8$, hauteur 2 (l'abscisse de M) ✓
- **Calcul** : $\frac{8 \times 2}{2} = 8$ ✓
- **Aire de MBC** : $\overrightarrow{MB} = (4; -3)$ et $\overrightarrow{MC} = (-2; 5)$ ✓
- **Déterminant** : $4 \times 5 - (-2) \times (-3) = 20 - 6 = 14$ ✓
- **Aire** : $\frac{14}{2} = 7$ ✓
- **Somme des trois aires** :

$$9 + 8 + 7 = 24$$

- **Comparaison** : la somme égale l'aire du triangle ✓
- **Conclusion** : M est bien à l'intérieur du triangle ✓
- **Critère utilisé** : si M était à l'extérieur, la somme des trois aires **dépasserait** celle de ABC ✓
- **Contre-exemple pour valider le critère** : avec $M'(5; 5)$, on aurait $A_{M'AB} = 15$, $A_{M'AC} = 20$ ✓
- **Troisième aire** : $\overrightarrow{M'B} = (1; -5)$ et $\overrightarrow{M'C} = (-5; 3)$, de déterminant $3 - 25 = -22$, soit 11 ✓
- **Somme** : $15 + 20 + 11 = 46 > 24$ ✓
- **Conclusion pour M'** : il est à l'extérieur ✓
- **Vérification directe** : la droite (BC) a pour équation $\frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1$, et M' donne $\frac{5}{6} + \frac{5}{8} \approx 1,46 > 1$ ✓

Réponse. Oui : $9 + 8 + 7 = 24$, la somme des trois aires égale celle de ABC .

Correction de l'exercice 11 - Rectangle à construire

- **Vecteur $\overrightarrow{AB}$** : $(6; 2)$ ✓
- **Longueur AB** : $\sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6,325$ ✓
- **Direction perpendiculaire** : $(-2; 6)$, car $6 \times (-2) + 2 \times 6 = 0$ ✓
- **Norme de ce vecteur** : $\sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ ✓
- **Coefficient à appliquer** : on veut une longueur $\sqrt{10}$, donc on multiplie par $\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{2}$ ✓
- **Vecteur $\overrightarrow{AD}$** : $\frac{1}{2}(-2; 6) = (-1; 3)$ ✓
- **Longueur** : $\sqrt{1 + 9} = \sqrt{10} \approx 3,162$ ✓
- **Coordonnées de D** :

$$D(1 - 1; 1 + 3) = (0; 4)$$
- **Coordonnées de C** : $C = B + \overrightarrow{AD} = (7 - 1; 3 + 3) = (6; 6)$ ✓
- **Vérification du parallélogramme** : $\overrightarrow{DC} = (6; 2) = \overrightarrow{AB}$ ✓
- **Vérification de l'angle droit** : $6 \times (-1) + 2 \times 3 = -6 + 6 = 0$ ✓
- **Conclusion** : $ABCD$ est un rectangle de dimensions $2\sqrt{10}$ et $\sqrt{10}$ ✓
- **Aire** : $2\sqrt{10} \times \sqrt{10} = 20$ ✓
- **Contrôle par le déterminant** : $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = 6 \times 3 - (-1) \times 2 = 18 + 2 = 20$ ✓
- **Diagonale** : $\overrightarrow{AC} = (5; 5)$, de longueur $5\sqrt{2} \approx 7,071$ ✓
- **Contrôle par Pythagore** : $40 + 10 = 50 = (5\sqrt{2})^2$ ✓
- **Seconde solution** : en prenant $(1; -3)$, on obtiendrait $D'(2; -2)$ et $C'(8; 0)$ ✓

Réponse. $D(0; 4)$ et $C(6; 6)$; le rectangle a pour aire 20 (l'autre solution est $D'(2; -2)$, $C'(8; 0)$).

Correction de l'exercice 12 - Colinéarité avec un paramètre

- **Vecteur $\overrightarrow{AB}$** : $(3; 3)$ ✓
- **Vecteur $\overrightarrow{AM}$** : $(t - 1; t^2 + 1)$ ✓
- **Condition** : le déterminant est nul ✓
- **Déterminant** : $3(t^2 + 1) - (t - 1) \times 3$ ✓

- **Développement** : $3t^2 + 3 - 3t + 3 = 3t^2 - 3t + 6$ ✓
- **Équation** : $3t^2 - 3t + 6 = 0$, soit $t^2 - t + 2 = 0$ ✓
- **Discriminant** : $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$ ✓
- **Conclusion** : aucune solution réelle ✓
- **Réponse** : la parabole $y = x^2$ ne rencontre **jamais** la droite (AB) ✓
- **Vérification par l'équation de la droite** : la pente vaut 1 et $y = x - 2$ ✓
- **Contrôle en A** : $1 - 2 = -1$ ✓
- **Intersection avec la parabole** : $x^2 = x - 2$, soit $x^2 - x + 2 = 0$ ✓
- **Cohérence** : même équation, même discriminant négatif ✓
- **Interprétation graphique** : la parabole est **au-dessus** de la droite partout ✓
- **Contrôle** : $x^2 - (x - 2) = x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4} > 0$ ✓
- **Écart minimal** : $\frac{7}{4} = 1,75$, atteint en $x = 0,5$ ✓

Réponse. Aucune valeur : $t^2 - t + 2 = 0$ a un discriminant $\Delta = -7 < 0$.

Correction de l'exercice 13 - Symétrique par rapport à une droite

- **Nature de $y = 2$** : une droite **horizontale** ✓
- **Effet de la symétrie** : l'abscisse est conservée, l'ordonnée se refléchit ✓
- **Distance de A à la droite** : $5 - 2 = 3$ ✓
- **Ordonnée de l'image** : $2 - 3 = -1$ ✓
- **Donc** :

$$A_1(2; -1)$$

- **Formule** : l'image de $(x; y)$ par la symétrie d'axe $y = k$ est $(x; 2k - y)$ ✓
- **Contrôle** : $2 \times 2 - 5 = -1$ ✓
- **Contrôle du milieu** : $\left(2; \frac{5-1}{2}\right) = (2; 2)$, bien sur la droite ✓
- **Nature de $x = -1$** : une droite **verticale** ✓
- **Distance de A à la droite** : $2 - (-1) = 3$ ✓
- **Abscisse de l'image** : $-1 - 3 = -4$ ✓
- **Donc** :

$$A_2(-4; 5)$$

- **Formule** : l'image de $(x; y)$ par la symétrie d'axe $x = h$ est $(2h - x; y)$ ✓
- **Contrôle** : $2 \times (-1) - 2 = -4$ ✓
- **Contrôle du milieu** : $\left(\frac{2-4}{2}; 5\right) = (-1; 5)$, bien sur la droite ✓
- **Composition des deux symétries** : on obtient $(-4; -1)$ ✓
- **Nature de cette composition** : la symétrie centrale de centre $(-1; 2)$, intersection des deux axes ✓
- **Contrôle** : le milieu de $[A(-4; -1)]$ est $\left(\frac{2-4}{2}; \frac{5-1}{2}\right) = (-1; 2)$ ✓

Réponse. $A_1(2; -1)$ et $A_2(-4; 5)$.

Correction de l'exercice 14 - Diagonales d'un quadrilatère

- **Milieu de [AC]** : $\left(\frac{0+9}{2}; \frac{0+6}{2}\right) = (4,5; 3)$ ✓

- **Milieu de $[BD]$** : $\left(\frac{7+2}{2}; \frac{1+5}{2}\right) = (4,5; 3) \checkmark$
- **Comparaison** : les deux milieux **coïncident** $\checkmark$
- **Conclusion** : $ABCD$ est un **parallélogramme** $\checkmark$
- **Contrôle par les côtés** : $\overrightarrow{AB} = (7; 1)$ et $\overrightarrow{DC} = (9-2; 6-5) = (7; 1) \checkmark$
- **Cohérence** : les deux caractérisations concordent $\checkmark$
- **Longueur AB** : $\sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7,071 \checkmark$
- **Vecteur $\overrightarrow{AD}$** : $(2; 5) \checkmark$
- **Longueur AD** : $\sqrt{4+25} = \sqrt{29} \approx 5,385 \checkmark$
- **Test du losange** : $AB \neq AD$, donc **non** $\checkmark$
- **Test du rectangle** : $7 \times 2 + 1 \times 5 = 14 + 5 = 19 \neq 0$, donc **non** $\checkmark$
- **Nature précise** : un parallélogramme quelconque $\checkmark$
- **Aire** : $|\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})| = |35 - 2| = 33 \checkmark$
- **Longueurs des diagonales** : $AC = \sqrt{81+36} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13} \approx 10,817 \checkmark$
- **Et** : $BD = \sqrt{25+16} = \sqrt{41} \approx 6,403 \checkmark$
- **Contrôle de la loi du parallélogramme** : $AC^2 + BD^2 = 117 + 41 = 158 \checkmark$
- **Autre membre** : $2(AB^2 + AD^2) = 2(50 + 29) = 158 \checkmark$

Réponse. Oui, les deux milieux valent $(4,5; 3)$: $ABCD$ est un parallélogramme quelconque, d'aire 33.

Correction de l'exercice 15 - Trois points et une aire imposée

- **Forme du point** : $C(2; y) \checkmark$
- **Vecteur $\overrightarrow{AB}$** : $(6; 0) \checkmark$
- **Vecteur $\overrightarrow{AC}$** : $(2; y) \checkmark$
- **Déterminant** : $6y - 2 \times 0 = 6y \checkmark$
- **Aire** : $\frac{|6y|}{2} = 3|y| \checkmark$
- **Équation** : $3|y| = 15$, donc $|y| = 5 \checkmark$
- **Solutions** :

$$C_1(2; 5) \quad C_2(2; -5)$$
- **Vérification pour C_1** : déterminant 30, aire 15 $\checkmark$
- **Vérification pour C_2** : déterminant -30, aire 15 $\checkmark$
- **Interprétation** : la base $AB = 6$ étant fixée, la hauteur doit valoir $\frac{2 \times 15}{6} = 5 \checkmark$
- **Cohérence** : la hauteur est la **distance à la droite** (AB) , c'est-à-dire $|y| \checkmark$
- **Lieu de tous les points d'aire 15** : les deux droites $y = 5$ et $y = -5 \checkmark$
- **Remarque** : l'abscisse de C n'intervient **pas** $\checkmark$
- **Contrôle avec $C(100; 5)$** : déterminant $6 \times 5 = 30$, aire 15 $\checkmark$
- **Longueurs pour C_1** : $AC_1 = \sqrt{4+25} = \sqrt{29} \approx 5,385 \checkmark$
- **Et** : $BC_1 = \sqrt{16+25} = \sqrt{41} \approx 6,403 \checkmark$
- **Symétrie** : C_1 et C_2 sont symétriques par rapport à la droite $(AB) \checkmark$

Réponse. $C_1(2; 5)$ et $C_2(2; -5)$: seule la hauteur $|y| = 5$ compte.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : problème complet de géométrie repérée

a) Vecteur $\overrightarrow{AB}$: $(6; -2)$ ✓

— Longueur : $AB = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6,325$ ✓

— Vecteur $\overrightarrow{BC}$: $(4; 8)$ ✓

— Longueur : $BC = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \approx 8,944$ ✓

— Vecteur $\overrightarrow{AC}$: $(10; 6)$ ✓

— Longueur : $AC = \sqrt{100 + 36} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34} \approx 11,662$ ✓

— Test de Pythagore avec AC comme plus grand côté : $40 + 80 = 120 \neq 136$ ✓

— Conclusion : le triangle **n'est pas rectangle** ✓

— Test isocèle : les trois longueurs sont distinctes ✓

— Nature : un triangle **quelconque** ✓

— Contrôle par le test de perpendicularité en B : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ donne
 $(-6) \times 4 + 2 \times 8 = -24 + 16 = -8 \neq 0$ ✓

b) Déterminant : $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 6 \times 6 - 10 \times (-2) = 36 + 20 = 56$ ✓

— Aire :

$$A = \frac{56}{2} = 28 \text{ unités d'aire}$$

— Contrôle par un autre couple : $\overrightarrow{BA} = (-6; 2)$ et $\overrightarrow{BC} = (4; 8)$, de déterminant
 $-48 - 8 = -56$ ✓

— Cohérence : même valeur absolue ✓

— Contrôle par la hauteur : la hauteur relative à [AC] vaut $\frac{2 \times 28}{2\sqrt{34}} = \frac{56}{11,662} \approx 4,802$ ✓

c) Condition : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ✓

— Système : $6 - x_D = 6$ et $5 - y_D = -2$ ✓

— Résolution :

$$D(0; 7)$$

— Vérification : $\overrightarrow{DC} = (6 - 0; 5 - 7) = (6; -2) = \overrightarrow{AB}$ ✓

— Centre du parallélogramme : milieu de [AC], soit $\left(\frac{-4 + 6}{2}; \frac{-1 + 5}{2}\right) = (1; 2)$ ✓

— Contrôle par l'autre diagonale : milieu de [BD], soit $\left(\frac{2 + 0}{2}; \frac{-3 + 7}{2}\right) = (1; 2)$ ✓

— Aire du parallélogramme : 56, soit le double de celle du triangle ✓

d) Centre de gravité :

$$G\left(\frac{-4 + 2 + 6}{3}; \frac{-1 - 3 + 5}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

— Valeurs approchées : $G \approx (1,333; 0,333)$ ✓

— Vecteur $\overrightarrow{AG}$: $\left(\frac{4}{3} + 4; \frac{1}{3} + 1\right) = \left(\frac{16}{3}; \frac{4}{3}\right)$ ✓

— Somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$: $(6 + 10; -2 + 6) = (16; 4)$ ✓

— Tiers de cette somme : $\left(\frac{16}{3}; \frac{4}{3}\right)$ ✓

— Conclusion : l'égalité $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ est vérifiée ✓

— Démonstration générale : de $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, on tire $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ✓

— Détail : $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}$ ✓

— **Substitution** : $3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ ✓

— **Contrôle final** : G est aussi le milieu du segment joignant A au point

$\left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2}\right)$ à raison de deux tiers — le milieu de $[BC]$ est $(4; 1)$, et

$$\frac{2}{3}(8; 2) = \left(\frac{16}{3}; \frac{4}{3}\right) \checkmark$$

Réponse. a) $AB = 2\sqrt{10}$, $BC = 4\sqrt{5}$, $AC = 2\sqrt{34}$ — quelconque · b) aire 28 · c) $D(0; 7)$, centre $(1; 2)$ · d) $G\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$.