Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : figures, aires et démonstrations

Vecteurs du plan — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Boîte à outils complète.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \qquad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = xy' - x'y \qquad A_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)\right|$$

Reconnaître un quadrilatère $ABCD$ — dans cet ordre.

Ce qu'on vérifie	Ce qu'on obtient
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$	parallélogramme
\+ $AB = AD$	losange
\+ angle droit en A (Pythagore dans ABD)	rectangle
losange **et** rectangle	carré
$\overrightarrow{AB}$ colinéaire à $\overrightarrow{DC}$ sans égalité	trapèze

Angle droit en repère. On calcule les trois longueurs du triangle ABD et l'on applique la réciproque du théorème de Pythagore :

$$AB^2 + AD^2 = BD^2 \implies \text{le triangle } ABD \text{ est rectangle en } A$$

Aires. Parallélogramme : base × hauteur ; losange : $\dfrac{d \times D}{2}$ avec ses diagonales ; triangle quelconque : rectangle englobant moins les triangles qui l'entourent.

Trois réflexes de rédaction.

- Toujours écrire les coordonnées des vecteurs **avant** de conclure.
- Une conclusion se rédige en français : « le déterminant est nul, **donc** les vecteurs sont colinéaires, **donc** les points sont alignés ».
- Un contrôle numérique indépendant (longueur, milieu, autre déterminant) vaut mieux qu'une relecture.

Correction de l'exercice 1 – Nature d'un quadrilatère

On procède par étapes, de la propriété la plus faible à la plus forte. D'abord $\overrightarrow{AB}(4\,;-3)$ et $\overrightarrow{DC}(8-4\,;3-6) = (4\,;-3)$ sont égaux : $ABCD$ est un **parallélogramme**.

Ensuite $AB = \sqrt{16+9} = 5$ et, avec $\overrightarrow{AD}(3\,;4)$, $AD = \sqrt{9+16} = 5$: deux côtés consécutifs égaux, c'est un **losange**.

Enfin, pour l'angle en A, on applique la réciproque du théorème de Pythagore au triangle ABD, avec $\overrightarrow{BD}(-1\,;7)$:

$$AB^2 + AD^2 = 25 + 25 = 50 = 1 + 49 = BD^2$$

L'angle en A est droit : un losange avec un angle droit est un **carré**, de côté 5 et d'aire 25. **Contrôle** : les diagonales $AC = \sqrt{49+1}$ et $BD = \sqrt{50}$ sont égales, comme dans tout

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

carré.

Réponse. Un **carré** de côté 5 et d'aire 25.

Correction de l'exercice 2 – Trapèze rectangle

On compare les côtés $[AB]$ et $[DC]$: $\overrightarrow{AB}(10\,;0)$ et $\overrightarrow{DC}(7\,;0)$ ont un déterminant nul, donc $(AB) \parallel (DC)$; comme $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$, c'est un **trapèze**, pas un parallélogramme.

Le côté $[AD]$ est porté par l'axe des ordonnées et $[AB]$ par l'axe des abscisses : ils sont perpendiculaires. Le trapèze est **rectangle** en A et en D, de hauteur $AD = 4$.

$$A = \frac{(AB + DC) \times AD}{2} = \frac{(10 + 7) \times 4}{2} = 34$$

Contrôle par découpage : un rectangle de 7 sur 4 (aire 28) et un triangle rectangle de côtés 3 et 4 (aire 6), soit 34.

Réponse. Un **trapèze rectangle** d'aire $\dfrac{(10 + 7) \times 4}{2} = 34$.

Correction de l'exercice 3 – Alignement de trois points construits

On calcule les points nécessaires : $I(3\,;0)$, milieu de $[AB]$, et $G\left(\dfrac{0+6+0}{3}\,;\dfrac{0+0+9}{3}\right) = (2\,;3)$. Pour l'alignement, on compare $\overrightarrow{IG}(-1\,;3)$ et $\overrightarrow{IC}(-3\,;9)$:

$$\det\left(\overrightarrow{IG}\,;\overrightarrow{IC}\right) = (-1) \times 9 - (-3) \times 3 = -9 + 9 = 0$$

Les points I, G, C sont **alignés**. Ce n'est pas un hasard : (CI) est la médiane issue de C, et le centre de gravité appartient aux trois médianes. On a même $\overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IG}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{CG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CI}$.

Contrôle sur la médiane issue de A : $J(3\,;4{,}5)$ et $\overrightarrow{AG}(2\,;3) = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$.

Réponse. Oui : $\det\left(\overrightarrow{IG}\,;\overrightarrow{IC}\right) = 0$, car (IC) est la médiane issue de C et G y appartient.

Correction de l'exercice 4 – Aires et rapport de partage

On place M : $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}(2\,;0)$, donc $M(2\,;0)$. Les triangles AMC et MBC ont leurs bases $[AM]$ et $[MB]$ sur l'axe des abscisses et le même sommet C : ils ont la **même hauteur**, l'ordonnée de C, soit 6.

$$A_{AMC} = \frac{AM \times 6}{2} = \frac{2 \times 6}{2} = 6 \qquad A_{MBC} = \frac{6 \times 6}{2} = 18$$

Contrôle : $6 + 18 = 24 = \dfrac{8 \times 6}{2}$, l'aire de ABC. Le rapport des aires vaut $\dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$, celui des bases $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{2}{6}$: à hauteur égale, les aires sont proportionnelles aux bases.

Réponse. $A_{AMC} = 6$ et $A_{MBC} = 18$: le rapport $\dfrac{1}{3}$ est celui des bases.

Correction de l'exercice 5 – Deux parallélogrammes emboîtés

D'abord, $\overrightarrow{AB}(6\,;2)$ et $\overrightarrow{DC}(6-0\,;7-5) = (6\,;2)$ sont égaux : $ABCD$ est un parallélogramme.

On calcule les milieux des côtés : $P(2\,;1)$ sur $[AB]$, $Q(5{,}5\,;4{,}5)$ sur $[BC]$, $R(3\,;6)$ sur $[CD]$ et $S(-0{,}5\,;2{,}5)$ sur $[DA]$. Puis $\overrightarrow{PQ}(3{,}5\,;3{,}5)$ et $\overrightarrow{SR}(3+0{,}5\,;6-2{,}5) = (3{,}5\,;3{,}5)$: ils sont égaux, donc $PQRS$ est aussi un parallélogramme.

Ce résultat ne dépend pas de la nature de $ABCD$: par Chasles,

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

C'est le parallélogramme de Varignon. **Contrôle** : $\overrightarrow{AC}(7\,;7)$, dont la moitié est $(3{,}5\,;3{,}5)$.

Réponse. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (6\,;2)$, et $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = (3{,}5\,;3{,}5)$: les deux sont des parallélogrammes.

Correction de l'exercice 6 – Point d'intersection de deux droites

On vérifie d'abord que les droites se coupent : $\overrightarrow{AB}(6\,;3)$ et $\overrightarrow{CD}(4\,;-8)$ ont pour déterminant $-48 - 12 = -60 \neq 0$.

On écrit les équations réduites. (AB) : coefficient directeur $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, et A donne $1 = -1 + b$, d'où $y = \frac{1}{2}x + 2$. (CD) : coefficient directeur $\frac{-1-7}{5-1} = -2$, et C donne $7 = -2 + b$, d'où $y = -2x + 9$. On résout

$$\frac{1}{2}x + 2 = -2x + 9 \Leftrightarrow \frac{5}{2}x = 7 \Leftrightarrow x = 2{,}8$$

puis $y = -5{,}6 + 9 = 3{,}4$. Le point d'intersection est $E(2{,}8\,;3{,}4)$. **Contrôle** : $\overrightarrow{AE}(4{,}8\,;2{,}4) = 0{,}8\overrightarrow{AB}$, donc E est sur le segment $[AB]$, aux quatre cinquièmes.

Réponse. $E(2{,}8\,;3{,}4)$, situé entre A et B ($\overrightarrow{AE} = 0{,}8\overrightarrow{AB}$).

Correction de l'exercice 7 – Triangle rectangle et cercle

On calcule les carrés des longueurs des côtés : $CA^2 = 9 + 9 = 18$, $CB^2 = 9 + 9 = 18$ et $AB^2 = 36$. Comme

$$CA^2 + CB^2 = 18 + 18 = 36 = AB^2$$

la réciproque du théorème de Pythagore montre que ABC est rectangle en C (et même isocèle, puisque $CA = CB$).

Le cercle de diamètre $[AB]$ a pour centre le milieu de $[AB]$, l'origine O, et pour rayon $\frac{AB}{2} = 3$. Or $OC = \sqrt{0+9} = 3$: C est sur ce cercle. C'est la propriété du cercle circonscrit à un triangle rectangle, dont l'hypoténuse est un diamètre. L'aire du triangle vaut $\frac{6 \times 3}{2} = 9$.

Réponse. $CA^2 + CB^2 = 36 = AB^2$ donc rectangle en C ; et $OC = 3 = \frac{AB}{2}$ donc C est sur le cercle de diamètre $[AB]$.

Correction de l'exercice 8 – Un losange à compléter

a) Le milieu de $[AC]$ est $\left(\frac{0+8}{2}\,;\frac{0+6}{2}\right) = (4\,;3)$, celui de $[BD]$ est $\left(\frac{1+7}{2}\,;\frac{7-1}{2}\right) = (4\,;3)$. Les diagonales se coupent en leur milieu : $ABCD$ est un parallélogramme.

b) $AB = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$ et $AD = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$. Un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs égaux est un **losange**.

c) $AC = \sqrt{64+36} = 10$ et $BD = \sqrt{36+64} = 10$. Un losange dont les diagonales ont la même longueur est un **carré**. Son aire, par la formule du losange :

$$A = \frac{AC \times BD}{2} = \frac{10 \times 10}{2} = 50$$

Contrôle : le côté vaut $\sqrt{50}$ et $\left(\sqrt{50}\right)^2 = 50$.

Réponse. a) milieu commun $(4\,;3)$ · b) $AB = AD = \sqrt{50}$: losange · c) $AC = BD = 10$: c'est

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

un carré, d'aire 50.

Correction de l'exercice 9 – Démonstration générale : milieux d'un quadrilatère

On veut montrer $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$. On décompose chaque vecteur par Chasles en passant par un sommet, puis on utilise les milieux : $\overrightarrow{PB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{SD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Donc $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ et $PQRS$ est un parallélogramme. La démonstration n'utilise **aucune** propriété de $ABCD$: elle vaut pour tout quadrilatère. On obtient de même $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$, d'où $PQ = \frac{AC}{2}$ et $QR = \frac{BD}{2}$.

Réponse. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{SR}$, donc $PQRS$ est un parallélogramme — pour tout quadrilatère $ABCD$.

Correction de l'exercice 10 – Un point à l'intérieur du triangle

a) Le coefficient directeur de (BC) vaut $\frac{8-0}{0-6} = -\frac{4}{3}$, et la droite passe par $C(0\,;8)$, d'ordonnée à l'origine 8 :

$$(BC) : y = -\frac{4}{3}x + 8$$

b) Le triangle est délimité par les deux axes et la droite (BC). Un point est à l'intérieur s'il a une abscisse et une ordonnée positives, et s'il est **sous** la droite (BC).

Pour $M(2\,;3)$: ses coordonnées sont positives, et en $x = 2$ la droite est à la hauteur $-\frac{8}{3} + 8 = \frac{16}{3} \approx 5{,}33$. Comme $3 < 5{,}33$, M est sous la droite : il est **à l'intérieur**.

Pour $M'(5\,;5)$: en $x = 5$, la droite est à la hauteur $-\frac{20}{3} + 8 = \frac{4}{3} \approx 1{,}33$, et $5 > 1{,}33$: M' est au-dessus de (BC), donc **à l'extérieur**.

Réponse. a) $y = -\frac{4}{3}x + 8$ · b) M est à l'intérieur, M' à l'extérieur.

Correction de l'exercice 11 – Rectangle à construire

a) $\overrightarrow{AB}(6\,;2)$ et $\overrightarrow{DC}(6-0\,;6-4) = (6\,;2)$ sont égaux : $ABCD$ est un parallélogramme.

b) $AB = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$, $AD = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ et $BD = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$. Dans le triangle ABD,

$$AB^2 + AD^2 = 40 + 10 = 50 = BD^2$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, l'angle en A est droit. Un parallélogramme qui a un angle droit est un **rectangle**.

c) Son aire vaut $AB \times AD = 2\sqrt{10} \times \sqrt{10} = 2 \times 10 = 20$. **Contrôle** : la diagonale AC a la même longueur que BD, $\sqrt{25+25} = \sqrt{50}$, comme dans tout rectangle.

Réponse. a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (6\,;2)$ · b) $AB = 2\sqrt{10}$, $AD = \sqrt{10}$, $BD = \sqrt{50}$ · c) 20.

Correction de l'exercice 12 – Colinéarité avec un paramètre

a) $M \in (AB)$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}(3\,;3)$ et $\overrightarrow{AM}(t-1\,;t^2+1)$ sont colinéaires :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AM}\right) = 3(t^2+1) - 3(t-1) = 3t^2 - 3t + 6 = 3(t^2 - t + 2)$$

Il est nul si et seulement si $t^2 - t + 2 = 0$.

b) En développant, $\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = t^2 - t + \frac{1}{4} + \frac{7}{4} = t^2 - t + 2$. Un carré est positif ou nul, donc $t^2 - t + 2 \geq \frac{7}{4} > 0$ pour tout t : l'équation n'a **aucune** solution. Le point M, qui décrit la parabole $y = x^2$, n'est jamais sur la droite (AB), d'équation $y = x - 2$: la parabole reste au-dessus.

Réponse. a) en écrivant le déterminant · b) aucune valeur de t : M n'est jamais sur (AB).

Correction de l'exercice 13 – Symétrique par rapport à une droite

La droite d'équation $y = 2$ est horizontale. La symétrie par rapport à elle conserve l'abscisse ; l'ordonnée est « réfléchie » : A est à $5 - 2 = 3$ unités au-dessus de la droite, son image est 3 unités en dessous, à l'ordonnée $2 - 3 = -1$. Donc $A_1(2\,;-1)$.

La droite $x = -1$ est verticale : on conserve l'ordonnée, et A étant à $2 - (-1) = 3$ unités à droite, son image est à l'abscisse $-1 - 3 = -4$. Donc $A_2(-4\,;5)$.

$$(x\,;y) \mapsto (x\,;2k - y) \text{ pour l'axe } y = k \qquad (x\,;y) \mapsto (2h - x\,;y) \text{ pour l'axe } x = h$$

Contrôle par les milieux : $[AA_1]$ a pour milieu $(2\,;2)$, sur la droite $y = 2$; $[AA_2]$ a pour milieu $(-1\,;5)$, sur la droite $x = -1$.

Réponse. $A_1(2\,;-1)$ et $A_2(-4\,;5)$.

Correction de l'exercice 14 – Diagonales d'un quadrilatère

On calcule les deux milieux : celui de $[AC]$ est $\left(\frac{0+9}{2}\,;\frac{0+6}{2}\right) = (4{,}5\,;3)$, celui de $[BD]$ est $\left(\frac{7+2}{2}\,;\frac{1+5}{2}\right) = (4{,}5\,;3)$. Ils coïncident : les diagonales se coupent en leur milieu, $ABCD$ est un **parallélogramme**. **Contrôle** : $\overrightarrow{AB}(7\,;1) = \overrightarrow{DC}$.

Pour préciser : $AB = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$ et $AD = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$, donc ce n'est pas un losange. Pour l'angle en A, avec $BD = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$:

$$AB^2 + AD^2 = 50 + 29 = 79 \neq 41 = BD^2$$

L'angle n'est pas droit, ce n'est pas un rectangle : $ABCD$ est un parallélogramme quelconque.

Réponse. Oui, les deux milieux valent $(4{,}5\,;3)$: $ABCD$ est un parallélogramme, ni losange ni rectangle.

Correction de l'exercice 15 – Trois points et une aire imposée

On note $C(2\,;y)$. La base $[AB]$ est sur l'axe des abscisses et mesure 6 ; la hauteur issue de C est la distance de C à cet axe, soit $|y|$. L'aire vaut donc

$$A = \frac{AB \times |y|}{2} = \frac{6|y|}{2} = 3|y|$$

L'aire vaut 15 si et seulement si $|y| = 5$, c'est-à-dire $y = 5$ ou $y = -5$: $C_1(2\,;5)$ et $C_2(2\,;-5)$.

Ces deux points sont symétriques par rapport à (AB). L'abscisse 2 n'intervient pas : tous les points des droites $y = 5$ et $y = -5$ donnent la même aire, puisque la hauteur est la même.

Réponse. $C_1(2\,;5)$ et $C_2(2\,;-5)$: seule la hauteur $|y| = 5$ compte.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : problème complet de géométrie repérée

a) $AB = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$, $BC = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$ et $AC = \sqrt{100+36} = \sqrt{136}$. Les trois longueurs sont distinctes. Le plus grand côté est $[AC]$, et $AB^2 + BC^2 = 120 \neq 136 = AC^2$: le triangle n’est pas rectangle. C’est un triangle **quelconque**.

b) Le rectangle va de $x = -4$ à $x = 6$ et de $y = -3$ à $y = 5$: aire $10 \times 8 = 80$. On retire les trois triangles rectangles qui entourent ABC : $\dfrac{6 \times 2}{2} = 6$ (côté $[AB]$), $\dfrac{4 \times 8}{2} = 16$ (côté $[BC]$) et $\dfrac{10 \times 6}{2} = 30$ (côté $[AC]$). L’aire de ABC vaut $80 - 52 = 28$.

c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ avec $\overrightarrow{AB}(6\,;-2)$: $6 - x_D = 6$ et $5 - y_D = -2$, donc $D(0\,;7)$. Le centre est le milieu de $[AC]$, $(1\,;2)$, qui est aussi celui de $[BD]$.

d) $G\left(\dfrac{-4+2+6}{3}\,;\dfrac{-1-3+5}{3}\right) = \left(\dfrac{4}{3}\,;\dfrac{1}{3}\right)$. Alors $\overrightarrow{AG}\left(\dfrac{16}{3}\,;\dfrac{4}{3}\right)$, et

$$\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}(16\,;4) = \left(\frac{16}{3}\,;\frac{4}{3}\right)$$

L’égalité est vérifiée.

Réponse. a) $AB = 2\sqrt{10}$, $BC = 4\sqrt{5}$, $AC = 2\sqrt{34}$ — quelconque · b) aire 28 · c) $D(0\,;7)$, centre $(1\,;2)$ · d) $G\left(\frac{4}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).