

Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : figures, aires et démonstrations

Vecteurs du plan — Seconde

Exercices

Méthode

Des problèmes complets où il faut **choisir** l'outil : coordonnées, Chasles, déterminant. On y démontre la nature d'un quadrilatère, on calcule des aires, on établit des parallélismes, et l'on rédige la conclusion comme dans un devoir.

Exercice 1 – Nature d'un quadrilatère

Soit $A(1; 2)$, $B(5; -1)$, $C(8; 3)$ et $D(4; 6)$. Déterminer la nature précise de $ABCD$.

Exercice 2 – Trapèze rectangle

Soit $A(0; 0)$, $B(10; 0)$, $C(7; 4)$ et $D(0; 4)$. Déterminer la nature de $ABCD$ et calculer son aire.

Exercice 3 – Alignement de trois points construits

Soit $A(0; 0)$, $B(6; 0)$ et $C(0; 9)$. On note I le milieu de $[AB]$, G le centre de gravité de ABC et J le milieu de $[BC]$. Les points I , G et C sont-ils alignés ?

Exercice 4 – Aires et rapport de partage

Soit $A(0; 0)$, $B(8; 0)$ et $C(2; 6)$. On place M sur $[AB]$ avec $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. Comparer les aires de AMC et MBC .

Exercice 5 – Deux parallélogrammes emboîtés

Soit $A(-1; 0)$, $B(5; 2)$, $C(6; 7)$ et $D(0; 5)$. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme, puis que le quadrilatère formé par les milieux de ses côtés en est aussi un.

Exercice 6 – Point d'intersection de deux droites

Soit $A(-2; 1)$, $B(4; 4)$, $C(1; 7)$ et $D(5; -1)$. Déterminer le point d'intersection de (AB) et (CD) .

Exercice 7 – Triangle rectangle et cercle

Soit $A(-3; 0)$, $B(3; 0)$ et $C(0; 3)$. Montrer que ABC est rectangle en C , puis que C appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

Exercice 8 – Un losange à compléter

Soit $A(0; 0)$ et $C(8; 6)$ les extrémités d'une diagonale d'un losange $ABCD$ dont l'autre diagonale mesure 10. Déterminer B et D .

Exercice 9 – Démonstration générale : milieux d'un quadrilatère

$ABCD$ est un quadrilatère quelconque, P, Q, R, S les milieux de $[AB], [BC], [CD], [DA]$. Démontrer sans coordonnées que $PQRS$ est un parallélogramme.

Exercice 10 – Un point à l'intérieur du triangle

Soit $A(0; 0)$, $B(6; 0)$ et $C(0; 8)$. Le point $M(2; 3)$ est-il à l'intérieur du triangle ? Justifier par un calcul d'aires.

Exercice 11 – Rectangle à construire

Soit $A(1; 1)$ et $B(7; 3)$. Construire un rectangle $ABCD$ dont la largeur AD vaille $\sqrt{10}$.

Exercice 12 – Colinéarité avec un paramètre

Soit $A(1; -1)$, $B(4; 2)$ et $M(t; t^2)$. Pour quelles valeurs de t le point M appartient-il à la droite (AB) ?

Exercice 13 – Symétrique par rapport à une droite

Soit $A(2; 5)$. Déterminer son symétrique par rapport à la droite d'équation $y = 2$, puis par rapport à $x = -1$.

Exercice 14 – Diagonales d'un quadrilatère

Soit $A(0; 0)$, $B(7; 1)$, $C(9; 6)$ et $D(2; 5)$. Les diagonales se coupent-elles en leur milieu ? Conclure sur la nature de $ABCD$.

Exercice 15 – Trois points et une aire imposée

Soit $A(0; 0)$ et $B(6; 0)$. Déterminer les points C d'abscisse 2 tels que l'aire du triangle ABC vaille 15.

Exercice 16 – Synthèse : problème complet de géométrie repérée

Soit $A(-4; -1)$, $B(2; -3)$, $C(6; 5)$.

- Calculer les longueurs des trois côtés et déterminer la nature du triangle.
- Calculer son aire.
- Déterminer D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme, puis son centre.
- Déterminer le centre de gravité G de ABC , et vérifier que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.