Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : figures, aires et démonstrations

Vecteurs du plan — Seconde

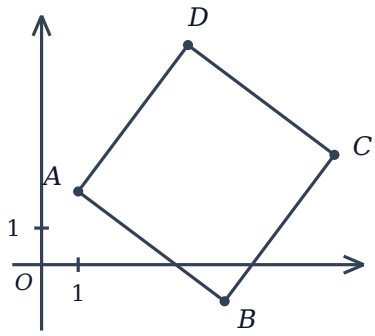
Exercices

Méthode

Des problèmes complets où il faut **choisir** l'outil : coordonnées, Chasles, déterminant. On y démontre la nature d'un quadrilatère, on calcule des aires, on établit des parallélismes, et l'on rédige la conclusion comme dans un devoir.

Exercice 1 – Nature d'un quadrilatère

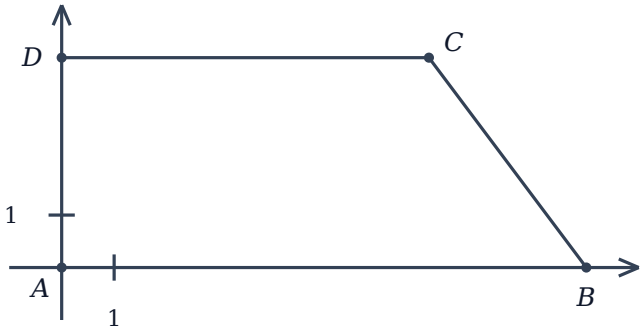
Soit $A(1\,;2)$, $B(5\,;-1)$, $C(8\,;3)$ et $D(4\,;6)$. Déterminer la nature précise de $ABCD$.



Le quadrilatère ABCD

Exercice 2 – Trapèze rectangle

Soit $A(0\,;0)$, $B(10\,;0)$, $C(7\,;4)$ et $D(0\,;4)$. Déterminer la nature de $ABCD$ et calculer son aire.



Le quadrilatère ABCD

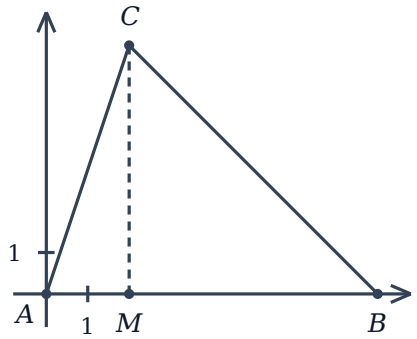
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 3 – Alignement de trois points construits

Soit $A(0\,;0)$, $B(6\,;0)$ et $C(0\,;9)$. On note I le milieu de $[AB]$, G le centre de gravité de ABC et J le milieu de $[BC]$. Les points I, G et C sont-ils alignés ?

Exercice 4 – Aires et rapport de partage

Soit $A(0\,;0)$, $B(8\,;0)$ et $C(2\,;6)$. On place M sur $[AB]$ avec $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. Comparer les aires de AMC et MBC.



Le triangle ABC partagé par le segment [CM]

Exercice 5 – Deux parallélogrammes emboîtés

Soit $A(-1\,;0)$, $B(5\,;2)$, $C(6\,;7)$ et $D(0\,;5)$. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme, puis que le quadrilatère formé par les milieux de ses côtés en est aussi un.

Exercice 6 – Point d'intersection de deux droites

Soit $A(-2\,;1)$, $B(4\,;4)$, $C(1\,;7)$ et $D(5\,;-1)$. Déterminer le point d'intersection de (AB) et (CD).

Exercice 7 – Triangle rectangle et cercle

Soit $A(-3\,;0)$, $B(3\,;0)$ et $C(0\,;3)$. Montrer que ABC est rectangle en C, puis que C appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

Exercice 8 – Un losange à compléter

Soit $A(0\,;0)$, $B(1\,;7)$, $C(8\,;6)$ et $D(7\,;-1)$.

a) Montrer que les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu.

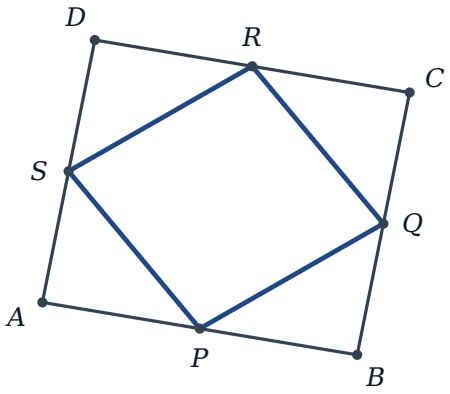
b) Montrer que $AB = AD$. Quelle est la nature de $ABCD$?

c) Calculer AC et BD, puis préciser la nature de $ABCD$ et son aire.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Démonstration générale : milieux d'un quadrilatère

$ABCD$ est un quadrilatère quelconque, P, Q, R, S les milieux de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$. Démontrer sans coordonnées que $PQRS$ est un parallélogramme.



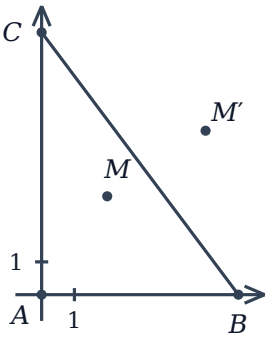
Un quadrilatère ABCD et le quadrilatère PQRS de ses milieux

Exercice 10 – Un point à l'intérieur du triangle

Soit $A(0\,;0)$, $B(6\,;0)$ et $C(0\,;8)$.

a) Déterminer l'équation réduite de la droite (BC).

b) Le point $M(2\,;3)$ est-il à l'intérieur du triangle ABC ? Et le point $M'(5\,;5)$?



Le triangle ABC et les points M et M′

Exercice 11 – Rectangle à construire

Soit $A(1\,;1)$, $B(7\,;3)$, $C(6\,;6)$ et $D(0\,;4)$.

a) Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

b) Calculer AB, AD et BD, puis montrer que $ABCD$ est un rectangle.

c) Calculer son aire.

Exercice 12 – Colinéarité avec un paramètre

Soit $A(1\,;-1)$, $B(4\,;2)$ et, pour tout réel t, $M(t\,;t^2)$.

a) Montrer que M appartient à la droite (AB) si et seulement si $t^2 - t + 2 = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Vérifier que $t^2 - t + 2 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$, puis conclure.

Exercice 13 – Symétrique par rapport à une droite

Soit $A(2\,;5)$. Déterminer son symétrique par rapport à la droite d'équation $y = 2$, puis par rapport à $x = -1$.

Exercice 14 – Diagonales d'un quadrilatère

Soit $A(0\,;0)$, $B(7\,;1)$, $C(9\,;6)$ et $D(2\,;5)$. Les diagonales se coupent-elles en leur milieu ? Conclure sur la nature de $ABCD$.

Exercice 15 – Trois points et une aire imposée

Soit $A(0\,;0)$ et $B(6\,;0)$. Déterminer les points C d'abscisse 2 tels que l'aire du triangle ABC vaille 15.

Exercice 16 – Synthèse : problème complet de géométrie repérée

Soit $A(-4\,;-1)$, $B(2\,;-3)$, $C(6\,;5)$.

a) Calculer les longueurs des trois côtés et déterminer la nature du triangle.

b) Calculer son aire en l'inscrivant dans un rectangle aux côtés parallèles aux axes.

c) Déterminer D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme, puis son centre.

d) Déterminer le centre de gravité G de ABC, et vérifier que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).