

Plaquette 3 – Fractions égales, simplification et comparaison

Fractions : introduction — Sixième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Fractions égales et comparaison.

- On ne change pas une fraction en multipliant, ou en divisant, **le numérateur et le dénominateur par le même nombre** (non nul) :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \quad \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

- **Simplifier**, c'est diviser en haut et en bas par un diviseur commun. On utilise les critères de divisibilité (par 2, 3, 5, 9, 10) et les tables. Une fraction qu'on ne peut plus simplifier est **irréductible**.

- $\frac{a}{b}$ est un **entier** quand a est dans la table de b : $\frac{35}{7} = 5$.

- **Comparer à $\frac{1}{2}$** : $\frac{a}{b} > \frac{1}{2}$ quand le numérateur dépasse la moitié du dénominateur ($2 \times a > b$).

- **Même dénominateur** : la plus grande fraction a le plus grand numérateur.

- **Dénominateur multiple de l'autre** : on transforme la fraction dont le dénominateur est le plus petit.

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 2}{6 \times 2} = \frac{10}{12} > \frac{7}{12}$$

- **Piège** : ajouter le même nombre en haut et en bas change la fraction.

Correction de l'exercice 1 – Compléter des égalités

On cherche à chaque fois **par quel nombre** on a multiplié, puis on multiplie l'autre terme par le même nombre :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$$

- $12 = 4 \times 3$: on multiplie aussi le numérateur par 3, soit $3 \times 3 = 9$.
- $15 = 3 \times 5$: on multiplie aussi le dénominateur par 5, soit $4 \times 5 = 20$.
- $100 = 4 \times 25$: le numérateur devient $3 \times 25 = 75$.

Donc $\frac{3}{4} = \frac{9}{12} = \frac{15}{20} = \frac{75}{100}$, et on retrouve au passage $\frac{3}{4} = 0,75$.

Réponse. $\frac{9}{12}$; $\frac{15}{20}$; $\frac{75}{100}$.

Correction de l'exercice 2 – Une famille de fractions

Chaque dénominateur est un multiple de 3. On cherche le multiplicateur, puis on l'applique au numérateur 2.

- $6 = 3 \times 2$: $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{6}$.
- $9 = 3 \times 3$: $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{6}{9}$.
- $15 = 3 \times 5$: $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}$.

— $30 = 3 \times 10$:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 10}{3 \times 10} = \frac{20}{30}$$

Remarque. Dans toutes ces fractions, le dénominateur vaut une fois et demie le numérateur : c'est la marque de $\frac{2}{3}$.

Réponse. $\frac{4}{6}$; $\frac{6}{9}$; $\frac{10}{15}$; $\frac{20}{30}$.

Correction de l'exercice 3 – Trouver l'intrus

On simplifie chaque fraction en divisant numérateur et dénominateur par le même nombre :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

- $\frac{6}{8}$: on divise par 2, on obtient $\frac{3}{4}$.
- $\frac{9}{12}$: on divise par 3, on obtient $\frac{3}{4}$.
- $\frac{15}{20}$: on divise par 5, on obtient $\frac{3}{4}$.
- $\frac{12}{15}$: on divise par 3, on obtient $\frac{4}{5}$, qui n'est pas $\frac{3}{4}$.

L'intrus est $\frac{12}{15}$.

Réponse. $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

Correction de l'exercice 4 – Simplifier en plusieurs étapes

On divise numérateur et dénominateur par un diviseur commun, et on recommence tant que c'est possible.

a) Par 2, puis par 2, puis par 3 :

$$\frac{36}{48} = \frac{18}{24} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

b) Les deux nombres finissent par 0 ou 5 : on divise par 5, $\frac{45}{60} = \frac{9}{12}$; puis par 3 : $\frac{3}{4}$.

c) Par 2 : $\frac{14}{21}$; puis par 7 : $\frac{2}{3}$.

$\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{3}$ sont irréductibles : 3 et 4, comme 2 et 3, n'ont aucun diviseur commun autre que 1. On peut aussi aller plus vite en divisant directement par 12 en a), par 15 en b) et par 14 en c).

Réponse. a) $\frac{3}{4}$ · b) $\frac{3}{4}$ · c) $\frac{2}{3}$.

Correction de l'exercice 5 – Simplifier avec les critères de divisibilité

On cherche le plus grand diviseur commun grâce aux critères et aux tables.

a) 75 et 100 sont dans la table de 25 ($75 = 25 \times 3$, $100 = 25 \times 4$) :

$$\frac{75}{100} = \frac{75 \div 25}{100 \div 25} = \frac{3}{4}$$

b) 42 et 54 sont pairs, et la somme de leurs chiffres (6 et 9) est dans la table de 3 : ils sont divisibles par 6. $\frac{42}{54} = \frac{7}{9}$.

c) $35 = 7 \times 5$ et $63 = 7 \times 9$: on divise par 7, $\frac{35}{63} = \frac{5}{9}$.

Réponse. a) $\frac{3}{4}$ · b) $\frac{7}{9}$ · c) $\frac{5}{9}$.

Correction de l'exercice 6 - Des fractions qui sont des entiers

Une fraction est un entier quand le numérateur est dans la table du dénominateur, car :

$$\frac{b \times n}{b} = n$$

— $18 = 6 \times 3$: $\frac{18}{6} = 3$.

— 20 n'est pas dans la table de 8 ($8 \times 2 = 16$, $8 \times 3 = 24$) : $\frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2,5$, pas un entier.

— $45 = 9 \times 5$: $\frac{45}{9} = 5$.

— 14 n'est pas dans la table de 4 : $\frac{14}{4} = \frac{7}{2} = 3,5$.

— $56 = 7 \times 8$: $\frac{56}{7} = 8$.

Réponse. $\frac{18}{6} = 3$, $\frac{45}{9} = 5$, $\frac{56}{7} = 8$.

Correction de l'exercice 7 - Plus ou moins que la moitié ?

La moitié du tout, c'est quand le numérateur vaut la moitié du dénominateur. On compare donc le numérateur à la moitié du dénominateur, ou, ce qui revient au même, $2 \times$ numérateur au dénominateur :

$$\frac{a}{b} > \frac{1}{2} \quad \text{quand} \quad 2 \times a > b$$

a) La moitié de 12 est 6 et $5 < 6$: $\frac{5}{12} < \frac{1}{2}$.

b) $2 \times 7 = 14 > 13$: $\frac{7}{13} > \frac{1}{2}$.

c) 9 est la moitié de 18 : $\frac{9}{18} = \frac{1}{2}$.

d) La moitié de 20 est 10 et $11 > 10$: $\frac{11}{20} > \frac{1}{2}$.

Réponse. a) $<$ · b) $>$ · c) $=$ · d) $>$.

Correction de l'exercice 8 - Comparer en changeant de dénominateur

Dans chaque cas, un dénominateur est un multiple de l'autre : on transforme la fraction qui a le plus petit dénominateur.

a) $12 = 6 \times 2$:

$$\frac{5}{6} = \frac{10}{12} > \frac{7}{12}$$

b) $20 = 5 \times 4$: $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$, et $12 < 13$, donc $\frac{3}{5} < \frac{13}{20}$.

c) $9 = 3 \times 3$: $\frac{7}{3} = \frac{21}{9}$, et $21 > 20$, donc $\frac{7}{3} > \frac{20}{9}$.

Piège. En b), $13 > 3$ et $20 > 5$ ne permettent pas de conclure : il faut le même dénominateur.

Réponse. a) $\frac{5}{6} > \frac{7}{12}$ · b) $\frac{3}{5} < \frac{13}{20}$ · c) $\frac{7}{3} > \frac{20}{9}$.

Correction de l'exercice 9 - Ranger cinq fractions

Les dénominateurs 4, 8, 2 et 16 divisent tous 16 : on écrit toutes les fractions en seizièmes.

$$\frac{3}{4} = \frac{12}{16} \quad \frac{5}{8} = \frac{10}{16} \quad \frac{1}{2} = \frac{8}{16} \quad \frac{7}{8} = \frac{14}{16}$$

On range les numérateurs : $8 < 10 < 11 < 12 < 14$. Donc :

$$- \frac{1}{2} < \frac{5}{8} < \frac{11}{16} < \frac{3}{4} < \frac{7}{8}.$$

— Contrôle avec les écritures décimales : $0,5 < 0,625 < 0,6875 < 0,75 < 0,875$.

Réponse. $\frac{1}{2} < \frac{5}{8} < \frac{11}{16} < \frac{3}{4} < \frac{7}{8}$.

Correction de l'exercice 10 - Entre deux entiers

On cherche dans la table du dénominateur les deux multiples qui entourent le numérateur, puis on écrit la fraction comme un entier plus une fraction inférieure à 1.

a) $5 \times 3 = 15 < 17 < 20 = 5 \times 4$:

$$\frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5} \quad \text{donc} \quad 3 < \frac{17}{5} < 4$$

b) $4 \times 7 = 28 < 29 < 32 : \frac{29}{4} = 7 + \frac{1}{4}$, entre 7 et 8.

c) $40 = 8 \times 5 : \frac{40}{8} = 5$, c'est un entier.

d) $7 < 9$: la fraction est inférieure à 1, donc entre 0 et 1.

Réponse. a) 3 et 4 · b) 7 et 8 · c) 5 · d) 0 et 1.

Correction de l'exercice 11 - Intercaler une fraction

Quand les numérateurs se suivent, on multiplie numérateurs et dénominateurs par 2 : un « trou » apparaît entre les deux numérateurs.

a) $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ et $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$: la fraction $\frac{3}{6}$ est entre les deux (c'est $\frac{1}{2}$).

b) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ et $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$:

$$\frac{6}{10} < \frac{7}{10} < \frac{8}{10}$$

c) $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ et $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$: $\frac{3}{8}$ convient.

Il existe beaucoup d'autres réponses, en multipliant par 3, par 4...

Réponse. Par exemple a) $\frac{1}{2}$ · b) $\frac{7}{10}$ · c) $\frac{3}{8}$.

Correction de l'exercice 12 - Des douzièmes sur la droite

Chaque graduation vaut $\frac{1}{12}$. On écrit chaque abscisse en douzièmes :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$$

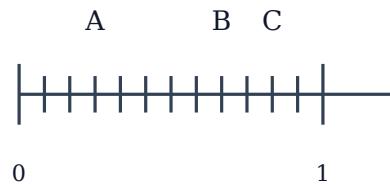
— $12 = 4 \times 3 : \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$, donc A est à 3 graduations de 0.

— $12 = 3 \times 4 : \frac{2}{3} = \frac{8}{12}$, donc B est à 8 graduations.

— $12 = 6 \times 2 : \frac{5}{6} = \frac{10}{12}$, donc C est à 10 graduations.

L'ordre des points sur la droite montre que $\frac{1}{4} < \frac{2}{3} < \frac{5}{6}$.

Réponse. $A : 3$ graduations · $B : 8$ · $C : 10$.



Correction de l'exercice 13 - Deux bandes à comparer

Sur la figure, la partie coloriée de la première bande est plus longue. On le justifie en écrivant les deux fractions avec le même dénominateur, $8 = 4 \times 2$:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8}$$

On compare $\frac{6}{8}$ et $\frac{5}{8}$: même dénominateur, et $6 > 5$. Donc $\frac{3}{4} > \frac{5}{8}$: la première bande a la plus grande partie coloriée, plus grande d'un huitième de bande.

Réponse. La première : $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} > \frac{5}{8}$.

Correction de l'exercice 14 - Quelle classe est la plus sportive ?

a) Classe A : $\frac{15}{20}$, on divise par 5 : $\frac{3}{4}$. Classe B : $\frac{21}{24}$, on divise par 3 : $\frac{7}{8}$.

b) On compare $\frac{3}{4}$ et $\frac{7}{8}$; $8 = 4 \times 2$:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} < \frac{7}{8}$$

La classe B a la plus grande proportion de sportifs, même si l'on ne compare pas des classes de même effectif.

Piège. Comparer 15 et 21 ne suffit pas : ce sont des effectifs, pas des proportions.

Réponse. a) $\frac{3}{4}$ et $\frac{7}{8}$ · b) la classe B.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : vrai ou faux

a) **Vrai.** $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (on divise par 2) et $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ (on divise par 3).

b) **Faux.** Seules la multiplication et la division conservent une fraction. Ici $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ et $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$: elles sont différentes.

c) **Faux.** $100 = 10 \times 10$:

$$\frac{9}{10} = \frac{90}{100} < \frac{99}{100}$$

d) **Faux.** 12 et 18 sont divisibles par 6 : $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

Réponse. a) vrai · b) faux · c) faux · d) faux ($\frac{2}{3}$).