

Plaquette 4 - Fréquences et probabilité

Probabilités — Sixième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Fréquence d'un résultat sur une série d'essais :

$$\text{fréquence} = \frac{\text{nombre de fois où le résultat est obtenu}}{\text{nombre total d'essais}}$$

Elle s'écrit, comme une probabilité, en fraction, en décimal ou en pourcentage, entre 0 et 1.

Fréquence et probabilité.

- Sur peu d'essais, la fréquence peut être loin de la probabilité : c'est le hasard.
- Sur un grand nombre d'essais, elle s'en rapproche, en général.

Prévoir. Sur n essais, on obtient un résultat de probabilité p **environ** $n \times p$ fois.

Le hasard n'a pas de mémoire. Les résultats passés ne changent pas la probabilité du prochain essai.

Correction de l'exercice 1 - Calculer une fréquence

La fréquence de « pile » vaut

$$\frac{27}{50} = \frac{54}{100} = 0,54 = 54 \%$$

La probabilité d'obtenir « pile » avec une pièce équilibrée est $\frac{1}{2} = 0,5 = 50 \%$.

La fréquence est un peu supérieure, de 4 points : c'est normal, car 50 lancers ne suffisent pas pour que la fréquence soit très proche de la probabilité.

Réponse. $\frac{27}{50} = 0,54 = 54 \%$, proche de 50 %.

Correction de l'exercice 2 - Soixante lancers de dé

On divise chaque effectif par 60 :

Face	1	2	3	4	5	6
Fréquence	0,15	$\approx 0,183$	$\approx 0,167$	$\approx 0,133$	0,2	$\approx 0,167$

La probabilité de chaque face vaut $\frac{1}{6} \approx 0,167$. Les fréquences s'en écartent un peu (de 0,133 à 0,2), sans qu'aucune face ne se détache vraiment. Si le dé était parfait et lancé une infinité de fois, chaque face sortirait exactement une fois sur six.

Réponse. Fréquences entre $\approx 0,133$ et 0,2, autour de $\frac{1}{6} \approx 0,167$.

Correction de l'exercice 3 - Beaucoup de lancers

On divise le nombre de « 6 » par le nombre de lancers :

$$\frac{3}{10} = 0,3 \quad \frac{21}{100} = 0,21 \quad \frac{172}{1000} = 0,172 \quad \frac{1665}{10\,000} = 0,1665$$

La probabilité vaut $\frac{1}{6} \approx 0,1667$. Avec 10 lancers, la fréquence en est loin ; plus le nombre de lancers augmente, plus la fréquence s'en rapproche. Avec 10 000 lancers, l'écart est inférieur à un millième.

Réponse. 0,3 ; 0,21 ; 0,172 ; 0,1665 : la fréquence se rapproche de $\frac{1}{6}$.

Correction de l'exercice 4 - Estimer une probabilité inconnue

Non : les deux positions possibles (pointe en l'air ou sur le côté) n'ont pas forcément la même chance, à cause de la forme de la punaise. On ne peut pas compter des résultats équiprobables.

On estime alors la probabilité par la fréquence obtenue sur un grand nombre d'essais :

$$\frac{312}{500} = 0,624$$

La probabilité que la punaise retombe la pointe en l'air est d'environ 0,62, soit environ 62 %.

Réponse. Non ; estimation : $\frac{312}{500} = 0,624$.

Correction de l'exercice 5 - Un dé truqué ?

Avec un dé équilibré, on attendrait environ $600 \times \frac{1}{6} = 100$ « 6 ». La fréquence observée vaut

$$\frac{180}{600} = 0,3$$

presque le double de $\frac{1}{6} \approx 0,167$.

Sur 600 lancers, un tel écart est très peu probable avec un dé équilibré : on peut fortement soupçonner que le dé est truqué en faveur du « 6 ». On ne peut pas en être certain, mais le doute est sérieux.

Réponse. Non : fréquence 0,3, bien au-dessus de $\frac{1}{6}$; le dé semble truqué.

Correction de l'exercice 6 - Deviner le contenu d'une urne

La fréquence des boules rouges vaut

$$\frac{61}{200} = 0,305$$

Sur un grand nombre de tirages, elle est proche de la probabilité de tirer une rouge, c'est-à-dire de la proportion de boules rouges dans l'urne.

$0,305 \times 10 \approx 3$: l'urne contient probablement 3 boules rouges (probabilité $\frac{3}{10} = 0,3$).

Pour en être sûr, il faudrait ouvrir l'urne.

Réponse. Probablement 3 boules rouges.

Correction de l'exercice 7 - Peu de lancers

La fréquence de « pile » vaut $\frac{7}{10} = 70\%$, assez loin de 50 %. Mais sur seulement 10 lancers, la fréquence peut s'écarter beaucoup de la probabilité : obtenir 7 « pile » sur 10 arrive souvent avec une pièce parfaitement équilibrée.

$$\frac{7}{10} = 0,7$$

Malo ne peut rien conclure : il faudrait lancer la pièce un grand nombre de fois (plusieurs centaines) pour juger.

Réponse. Non : 10 lancers ne suffisent pas pour conclure.

Correction de l'exercice 8 – Prévoir un nombre de résultats

La probabilité d'obtenir un nombre pair vaut $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$: sur 600 lancers, on peut s'attendre à environ

$$600 \times \frac{1}{2} = 300$$

nombres pairs.

La probabilité d'obtenir « 1 » vaut $\frac{1}{6}$: on peut s'attendre à environ $600 \div 6 = 100$ « 1 ».

Ce sont des ordres de grandeur, pas des certitudes : on obtiendra par exemple 289 ou 312 nombres pairs.

Réponse. Environ 300 nombres pairs et environ 100 « 1 ».

Correction de l'exercice 9 – Le hasard n'a pas de mémoire

Non. La pièce ne « se souvient » pas des lancers précédents : chaque lancer est indépendant des autres. Au prochain lancer, la probabilité de « face » reste

$$\frac{1}{2}$$

exactement comme avant. Les fréquences se rapprochent de la probabilité sur un très grand nombre de lancers, non parce que le hasard « compense », mais parce que trois lancers comptent très peu parmi des milliers.

Réponse. Non : la probabilité de « face » reste $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 10 – L'expérience de la classe

a) $25 \times 20 = 500$ lancers au total.

b) La fréquence de « pile » pour la classe vaut

$$\frac{260}{500} = 0,52 = 52 \%$$

Elle est bien plus proche de 50 % que les fréquences individuelles : avec 20 lancers chacun, le hasard crée de grands écarts (30 % à 70 %), mais en regroupant 500 lancers, ces écarts se compensent.

Réponse. a) 500 lancers — b) 52 %, proche de 50 %.

Correction de l'exercice 11 – Une roue tournée 400 fois

La probabilité de tomber sur un secteur coloré vaut $\frac{3}{8}$. Sur 400 essais, on attend environ

$$400 \times \frac{3}{8} = 150$$

secteurs colorés.

Obtenir 143 fois un secteur coloré donne une fréquence de $\frac{143}{400} \approx 0,36$, contre $\frac{3}{8} = 0,375$.

L'écart est faible : ce résultat n'a rien de surprenant.

Réponse. Environ 150 ; 143 n'est pas surprenant.

Correction de l'exercice 12 - Deux expériences à comparer

Les fréquences valent

$$\frac{13}{20} = 0,65 \quad \frac{106}{200} = 0,53$$

La fréquence de Béa est plus proche de 0,5, et surtout, elle repose sur dix fois plus de lancers. Plus le nombre d'essais est grand, plus la fréquence donne une estimation fiable de la probabilité : on retient celle de Béa.

Réponse. Ali : 0,65 ; Béa : 0,53 ; celle de Béa est la plus fiable.

Correction de l'exercice 13 - Estimer une proportion

La fréquence des jetons bleus vaut $\frac{42}{100} = 0,42$. Sur un grand nombre de tirages, elle est proche de la proportion de jetons bleus dans la boîte.

$$0,42 \times 50 = 21$$

La boîte contient probablement une vingtaine de jetons bleus, autour de 21. C'est une estimation : avec plus de tirages, elle serait plus précise.

Réponse. Environ 21 jetons bleus.

Correction de l'exercice 14 - Repérer une erreur

Une probabilité de $\frac{1}{6}$ ne signifie pas qu'on obtient exactement un « 6 » tous les six lancers. Elle indique qu'**en moyenne**, sur un très grand nombre de lancers, le « 6 » sort environ une fois sur six.

$$6 \times \frac{1}{6} = 1$$

n'est qu'un ordre de grandeur. Sur 6 lancers, ne pas obtenir de « 6 » arrive très souvent (environ une fois sur trois) : Hugo ne peut pas conclure que le dé est truqué.

Réponse. $\frac{1}{6}$ est une tendance sur un grand nombre de lancers, pas une règle sur 6 lancers.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : la boîte mystère

a) Fréquences : rouge $\frac{201}{400} \approx 0,50$; vert $\frac{98}{400} \approx 0,25$; bleu $\frac{101}{400} \approx 0,25$.

b) Ces fréquences sont proches de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4}$. Pour 20 billes :

$$20 \times \frac{1}{2} = 10 \quad 20 \times \frac{1}{4} = 5$$

La boîte contient probablement 10 billes rouges, 5 vertes et 5 bleues.

c) La probabilité de tirer une bille verte serait alors $\frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 25\%$, en accord avec la fréquence observée.

Réponse. a) $\approx 0,50$; 0,25 ; 0,25 — b) 10 rouges, 5 vertes, 5 bleues — c) $\frac{1}{4}$.