

Plaquette 5 – Jeux et problèmes

Probabilités – Sixième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Calculer : probabilité = $\frac{\text{résultats favorables}}{\text{résultats possibles}}$ (résultats équiprobables).

Comparer : écrire les probabilités sous la même forme (décimal ou même dénominateur).

Jeu équitable : chaque joueur a la même probabilité de gagner. À deux joueurs, sans match nul :

$$\text{probabilité de gagner} = \frac{1}{2} \text{ pour chacun}$$

Construire : pour obtenir une probabilité $\frac{a}{b}$ avec n objets, il faut $n \times \frac{a}{b}$ objets favorables (si ce nombre est entier).

Deux étapes : tableau ou arbre pour recenser tous les résultats.

Correction de l'exercice 1 – Choisir le meilleur jeu

On calcule les trois probabilités et on les écrit en décimal :

$$\text{dé} : \frac{1}{6} \approx 0,17 \quad \text{carte} : \frac{16}{32} = 0,5 \quad \text{roue} : \frac{3}{10} = 0,3$$

(un jeu de 32 cartes compte 16 cartes rouges : les cœurs et les carreaux).

Le tirage d'une carte rouge est le plus favorable : Zoé a une chance sur deux de gagner.

Réponse. La carte rouge (0,5), devant la roue (0,3) et le dé ($\approx 0,17$).

Correction de l'exercice 2 – Un jeu équitable ?

Paul gagne avec 2 résultats sur 6 : $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Inès gagne avec 4 résultats sur 6 :

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Inès a deux fois plus de chances que Paul : le jeu n'est pas équitable.

Pour le rendre équitable, il faut donner à chacun 3 résultats sur 6 : par exemple, Paul gagne avec 1, 2 ou 3, Inès avec 4, 5 ou 6 (ou bien : Paul avec un nombre pair, Inès avec un nombre impair).

Réponse. Non ($\frac{1}{3}$ contre $\frac{2}{3}$) ; par exemple 1, 2, 3 pour Paul et 4, 5, 6 pour Inès.

Correction de l'exercice 3 – Construire une urne

La probabilité de tirer une rouge est le nombre de rouges divisé par 24. On cherche une fraction égale à $\frac{3}{8}$ de dénominateur 24 :

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \times 3}{8 \times 3} = \frac{9}{24}$$

Il faut 9 boules rouges, et donc $24 - 9 = 15$ boules noires. On peut aussi raisonner ainsi :

$\frac{3}{8}$ de 24, c'est $24 \div 8 \times 3 = 9$.

Réponse. 9 boules rouges (et 15 noires).

Correction de l'exercice 4 - Fabriquer une roue

Il faut un nombre de secteurs qui soit un multiple de 12 et de 4 : le plus petit est 12.

— Secteurs gagnants : $\frac{5}{12}$ de 12, soit 5 secteurs.

— Secteurs « deuxième essai » : $\frac{1}{4}$ de 12, soit
 $12 \div 4 = 3$

secteurs.

— Les $12 - 5 - 3 = 4$ autres secteurs sont perdants.

Réponse. 12 secteurs : 5 gagnants, 3 « deuxième essai », 4 perdants.

Correction de l'exercice 5 - Ajouter des boules

On essaie en ajoutant les boules une à une : avec 3 vertes, $\frac{3}{13}$; avec 4 vertes, $\frac{4}{14} = \frac{2}{7}$; avec 5 vertes, $\frac{5}{15}$:

$$\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

Il faut ajouter 3 boules vertes. On peut le comprendre ainsi : une chance sur trois, c'est une boule verte pour deux boules jaunes ; pour 10 jaunes, il faut 5 vertes.

Réponse. Ajouter 3 boules vertes ($\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$).

Correction de l'exercice 6 - Pair ou impair avec deux dés

Dans le tableau des sommes (36 cases), on compte les sommes paires : 2 (1 case), 4 (3), 6 (5), 8 (5), 10 (3), 12 (1), soit 18 cases.

$$\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Les 18 autres cases donnent une somme impaire. Chaque joueur a une chance sur deux de gagner : le jeu est équitable.

Réponse. Oui : $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ pour chacun.

Correction de l'exercice 7 - Une loterie de kermesse

Actuellement, la probabilité de gagner vaut

$$\frac{25}{500} = \frac{5}{100} = 5\%$$

Pour atteindre 10 %, il faut que 10 tickets sur 100 soient gagnants, soit 50 tickets gagnants sur 500. Il faut donc doubler le nombre de lots : 50 tickets gagnants au minimum.

Réponse. Au moins 50 tickets gagnants.

Correction de l'exercice 8 - Un code secret

Il y a 10 choix pour chaque chiffre, donc

$$10 \times 10 \times 10 = 1000$$

codes différents (de 000 à 999).

Un seul est le bon : la probabilité de le trouver du premier coup vaut $\frac{1}{1000} = 0,001$. Avec un code de 4 chiffres, elle serait dix fois plus petite.

Réponse. 1000 codes ; $\frac{1}{1000}$.

Correction de l'exercice 9 - Retrouver une composition

Rouges et vertes représentent ensemble $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ des billes. Les bleues représentent donc le quart restant :

$$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Un quart des billes, ce sont 6 billes : le sac en contient $6 \times 4 = 24$, dont 6 rouges, 12 vertes et 6 bleues. On vérifie : $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ et $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.

Réponse. 24 billes (6 rouges, 12 vertes, 6 bleues).

Correction de l'exercice 10 - Repérer une erreur

Dans un jeu de 32 cartes, il y a 4 as et 8 cœurs : les probabilités valent $\frac{4}{32} = 0,125$ et $\frac{8}{32} = 0,25$, très loin de 0,5 et 0,7.

Pour le second élève, « tirer un trèfle » et « ne pas tirer un trèfle » sont deux événements dont l'un se produit forcément : leurs probabilités doivent avoir une somme égale à 1.

$$0,4 + 0,5 = 0,9 \neq 1$$

Il y a une erreur. En réalité, $P(\text{trèfle}) = \frac{8}{32} = 0,25$ et la probabilité contraire vaut 0,75.

Réponse. As : 0,125 ; cœur : 0,25 ; trèfle : 0,25 et contraire 0,75.

Correction de l'exercice 11 - Deux urnes

On numérote les boules : A contient R1, R2, N1, N2, N3 ; B contient r, n1, n2, n3. Le tableau a $5 \times 4 = 20$ cases, toutes aussi probables.

Les couples « deux rouges » sont (R1, r) et (R2, r), soit 2 cases :

$$\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

Il ne faut pas compter les couleurs (rouge ou noire), mais les boules : chaque boule a la même chance d'être tirée.

Réponse. $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

Correction de l'exercice 12 - Le meilleur pari

Dans le tableau des sommes (36 cases) :

— la somme 7 occupe 6 cases : $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$;

— les doubles (1-1, 2-2, ..., 6-6) occupent 6 cases :

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Les deux paris ont exactement la même probabilité : aucun n'est meilleur que l'autre.

Réponse. Les deux se valent : $\frac{1}{6}$ chacun.

Correction de l'exercice 13 - Une roue truquée ?

La probabilité de gagner vaut $\frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0,2$. Sur 300 tours, on attendrait environ

$$300 \times \frac{1}{5} = 60$$

gagnants.

15 gagnants donnent une fréquence de $\frac{15}{300} = 0,05$, quatre fois plus petite que la probabilité. Sur 300 tours, un tel écart est très improbable : on peut soupçonner que la roue est truquée (par exemple, freinée sur les secteurs gagnants).

Réponse. Non : on attend environ 60 gagnants, pas 15.

Correction de l'exercice 14 - Organiser un tirage au sort

Avec un simple tirage parmi les 28 élèves, la probabilité de tirer un externe vaut

$$\frac{12}{28} = \frac{3}{7}$$

ce qui ne fait pas une chance sur deux.

Méthode possible en deux étapes : on lance d'abord une pièce (pile : externes, face : demi-pensionnaires), puis on tire au sort un élève dans le groupe désigné. Chaque groupe a alors une probabilité $\frac{1}{2}$ d'être choisi, quel que soit le nombre d'élèves qu'il contient.

Réponse. Tirer d'abord le groupe à pile ou face, puis l'élève dans le groupe.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : le stand de la kermesse

a) Billes dorées : $\frac{1}{10}$ de 30, soit 3. Billes argentées : 30 % de 30, soit $0,3 \times 30 = 9$. Les autres : $30 - 3 - 9 = 18$ billes ne font rien gagner.

b) La probabilité de ne rien gagner vaut

$$\frac{18}{30} = \frac{3}{5} = 60 \%$$

c) Sur 200 joueurs, on attend environ $200 \times \frac{1}{10} = 20$ gros lots. Emma doit en prévoir une vingtaine, et un peu plus par prudence, car le hasard peut en faire sortir davantage.

Réponse. a) 3 dorées, 9 argentées, 18 autres — b) $\frac{3}{5} = 60 \%$ — c) environ 20.