

Plaquette 4 - Échelles : plans, cartes et maquettes

Proportionnalité — Sixième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Échelles.

- Une échelle de $\frac{1}{n}$ signifie que 1 cm sur le dessin représente n cm dans la réalité (**mêmes unités**).

$$\text{longueur réelle} = \text{longueur sur le plan} \times n \quad \text{longueur sur le plan} = \text{longueur réelle} \div n$$

- **Toujours convertir dans la même unité** avant de calculer, en général en cm : 1 m = 100 cm ; 1 km = 100 000 cm.
- **Trouver l'échelle** : on écrit la fraction, les deux longueurs dans la même unité.

$$\text{échelle} = \frac{\text{longueur sur le plan}}{\text{longueur réelle}}$$

- Une échelle **plus petite que** 1 (plan, carte) réduit ; une échelle **plus grande que** 1 (dessin d'un insecte) agrandit : une échelle de 5 rend le dessin 5 fois plus grand que l'objet.
- Plus n est petit, plus la carte montre de détails : une carte au $\frac{1}{25\,000}$ est plus détaillée qu'une carte au $\frac{1}{100\,000}$.

Correction de l'exercice 1 - Un plan au centième

L'échelle $\frac{1}{100}$ signifie que 1 cm sur le plan représente 100 cm en réalité :

$$\text{longueur réelle} = \text{longueur sur le plan} \times 100$$

- Couloir : $4,5 \times 100 = 450$ cm, soit 4,5 m.
- Pièce : $7,2 \times 100 = 720$ cm, soit 7,2 m.

À l'échelle $\frac{1}{100}$, « 1 cm sur le plan, 1 m en réalité » : le nombre de cm sur le plan est aussi le nombre de mètres réels.

Réponse. 4,5 m et 7,2 m.

Correction de l'exercice 2 - La carte de randonnée

1 cm sur la carte représente 25 000 cm en réalité.

a) On multiplie par 25 000 :

$$6 \times 25\,000 = 150\,000 \text{ cm}$$

Or 1 km = 100 000 cm, donc 150 000 cm = 1,5 km.

b) On convertit d'abord : 2 km = 200 000 cm. Puis on divise par 25 000 :
 $200\,000 \div 25\,000 = 8$ cm.

Réponse. a) 1,5 km · b) 8 cm.

Correction de l'exercice 3 - Retrouver l'échelle

On exprime les deux longueurs **dans la même unité** (le cm), puis on écrit la fraction :

$$\text{échelle} = \frac{\text{longueur sur le plan}}{\text{longueur réelle}}$$

a) 50 m = 5 000 cm. Échelle : $\frac{5}{5\,000} = \frac{1}{1\,000}$ (on divise par 5).

b) 1,5 km = 150 000 cm. Échelle : $\frac{3}{150\,000} = \frac{1}{50\,000}$ (on divise par 3).

Piège. Écrire $\frac{5}{50}$ en a) : les longueurs ne sont pas dans la même unité.

Réponse. a) $\frac{1}{1\,000}$ · b) $\frac{1}{50\,000}$.

Correction de l'exercice 4 - Le plan du salon

a) À l'échelle $\frac{1}{100}$, on multiplie chaque longueur par 100 :

$$\text{longueur réelle} = \text{longueur sur le plan} \times 100$$

— $6 \times 100 = 600 \text{ cm} = 6 \text{ m}$;

— $4 \times 100 = 400 \text{ cm} = 4 \text{ m}$.

b) On calcule l'aire avec les longueurs **réelles** : $6 \times 4 = 24 \text{ m}^2$.

Piège. Calculer l'aire sur le plan (24 cm^2) puis la multiplier par 100 donne $2\,400 \text{ cm}^2$, c'est-à-dire $0,24 \text{ m}^2$: c'est faux, l'échelle porte sur les longueurs, pas sur les aires.

Réponse. a) 6 m sur 4 m · b) 24 m^2 .

Correction de l'exercice 5 - Dessiner une chambre

On convertit en cm, puis on divise par 50 :

$$\text{longueur sur le plan} = \text{longueur réelle} \div 50$$

— $3,5 \text{ m} = 350 \text{ cm}$; $350 \div 50 = 7 \text{ cm}$.

— $2,8 \text{ m} = 280 \text{ cm}$; $280 \div 50 = 5,6 \text{ cm}$.

Le rectangle mesure 7 cm sur 5,6 cm. Contrôle : $7 \times 50 = 350 \text{ cm} = 3,5 \text{ m}$.

Réponse. 7 cm sur 5,6 cm.

Correction de l'exercice 6 - Agrandir un insecte

Une échelle de 5 signifie que le dessin est 5 **fois plus grand** que la réalité :

$$\text{longueur sur le dessin} = \text{longueur réelle} \times 5$$

a) $8 \times 5 = 40 \text{ mm}$, soit 4 cm.

b) Ici on connaît le dessin : la coccinelle réelle est 4 fois plus petite. $3 \text{ cm} = 30 \text{ mm}$, et $30 \div 4 = 7,5 \text{ mm}$.

Contrôle de b) : $7,5 \times 4 = 30 \text{ mm}$.

Réponse. a) 4 cm · b) 7,5 mm.

Correction de l'exercice 7 - La maquette de voiture

La maquette est 20 fois plus petite que la voiture. On convertit en cm, puis on divise par 20 :

$$\text{longueur de la maquette} = \text{longueur réelle} \div 20$$

— Longueur : $4,2 \text{ m} = 420 \text{ cm}$; $420 \div 20 = 21 \text{ cm}$.

— Largeur : $1,8 \text{ m} = 180 \text{ cm}$; $180 \div 20 = 9 \text{ cm}$.

La maquette mesure 21 cm sur 9 cm.

Réponse. 21 cm sur 9 cm.

Correction de l'exercice 8 - La carte routière

1 cm sur la carte représente 200 000 cm, c'est-à-dire 2 km.

$$1 \text{ cm} \leftrightarrow 200\,000 \text{ cm} = 2 \text{ km}$$

a) $3,5 \times 2 = 7 \text{ km}$.

b) On cherche combien de fois 2 km dans 12 km : $12 \div 2 = 6 \text{ km}$.

Cette carte est pratique pour un trajet en voiture, mais trop peu détaillée pour une randonnée.

Réponse. a) 7 km · b) 6 km.

Correction de l'exercice 9 - Le tableau d'échelle

1 cm sur le plan représente 500 cm, c'est-à-dire 5 m. Le tableau est un tableau de proportionnalité de coefficient 5 (des cm du plan vers les m réels) :

$$\text{réalité (m)} = \text{plan (cm)} \times 5$$

— $1 \text{ cm} \rightarrow 5 \text{ m}$; $3 \text{ cm} \rightarrow 15 \text{ m}$; $4,6 \text{ cm} \rightarrow 23 \text{ m}$.

— Pour 40 m, on divise par 5 : $40 \div 5 = 8 \text{ cm}$.

Réponse. 5 m ; 15 m ; 23 m ; 8 cm.

Correction de l'exercice 10 - Le terrain de football

a) 1 cm sur le plan représente 1 000 cm = 10 m :

$$\text{longueur réelle (m)} = \text{longueur sur le plan (cm)} \times 10$$

— Longueur : $10,5 \times 10 = 105 \text{ m}$;

— largeur : $6,8 \times 10 = 68 \text{ m}$.

b) Le tour du terrain est le périmètre du rectangle : $2 \times (105 + 68) = 2 \times 173 = 346 \text{ m}$.

Réponse. a) 105 m sur 68 m · b) 346 m.

Correction de l'exercice 11 - Trois villages

1 cm sur la carte représente 50 000 cm, c'est-à-dire 0,5 km.

$$\text{distance réelle (km)} = \text{distance sur la carte (cm)} \times 0,5$$

— $AB : 4 \times 0,5 = 2 \text{ km}$;

— $BC : 3 \times 0,5 = 1,5 \text{ km}$;

— $CA : 5 \times 0,5 = 2,5 \text{ km}$.

Total : $2 + 1,5 + 2,5 = 6 \text{ km}$. Autre calcul : $4 + 3 + 5 = 12 \text{ cm}$ sur la carte, et $12 \times 0,5 = 6 \text{ km}$.

Réponse. 6 km.

Correction de l'exercice 12 - Deux cartes à comparer

On convertit $4 \text{ km} = 400\,000 \text{ cm}$, puis on divise par le dénominateur de l'échelle :

$$\text{longueur sur la carte} = \text{longueur réelle} \div n$$

- Au $\frac{1}{25\,000}$: $400\,000 \div 25\,000 = 16$ cm.
- Au $\frac{1}{100\,000}$: $400\,000 \div 100\,000 = 4$ cm.

b) La route est dessinée 4 fois plus grande sur la première carte : c'est la carte au $\frac{1}{25\,000}$ qui est la plus détaillée.

Réponse. a) 16 cm et 4 cm · b) la carte au $\frac{1}{25\,000}$.

Correction de l'exercice 13 - « 1 cm pour 2 km »

a) On écrit les deux longueurs en cm : 2 km = 200 000 cm.

$$\text{échelle} = \frac{1}{200\,000}$$

b) Chaque centimètre représente 2 km : $13,5 \times 2 = 27$ km.

La légende « 1 cm pour 2 km » est une autre façon, plus parlante, d'écrire l'échelle.

Réponse. a) $\frac{1}{200\,000}$ · b) 27 km.

Correction de l'exercice 14 - Combien de temps de marche ?

Étape 1 : la distance réelle. On multiplie par 25 000 :

$$18 \times 25\,000 = 450\,000 \text{ cm} = 4,5 \text{ km}$$

Étape 2 : la durée. À vitesse régulière, la distance est proportionnelle à la durée. Le groupe parcourt 4,5 km en 1 heure, et l'itinéraire mesure exactement 4,5 km.

La randonnée dure 1 heure (sans compter les pauses).

Réponse. 1 heure.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : vrai ou faux

- a) **Vrai.** 1 cm représente 100 cm, c'est-à-dire 1 m.
- b) **Faux.** Une échelle plus grande que 1 **agrandit** : le dessin est trois fois plus grand que l'objet.
- c) **Vrai.** $2 \times 50\,000 = 100\,000 \text{ cm} = 1 \text{ km}$.
- d) **Faux.** On convertit 4 m = 400 cm, puis :
$$400 \div 200 = 2 \text{ cm}$$

La pièce mesure 2 cm sur le plan.

Réponse. a) vrai · b) faux · c) vrai · d) faux (2 cm).