Plaquette 1 – Reconnaître, compléter et utiliser un tableau de proportionnalité

Proportionnalité — Sixième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Deux grandeurs proportionnelles. Quand on multiplie l'une par un nombre, l'autre est multipliée par le même nombre. Le plus souvent, l'une s'obtient en multipliant l'autre par une valeur fixe, comme un prix au kilo :

$$\text{prix} = \text{masse} \times \text{prix d'un kilo}$$

Trois raisonnements pour trouver une valeur manquante.

— **Multiplier ou diviser** : 3 fois plus de farine pour 3 fois plus de crêpes ; la moitié de la recette pour la moitié des personnes.
— **Additionner** : le prix de 5 kg est le prix de 2 kg plus celui de 3 kg.
— **Passer par l'unité** : on calcule d'abord la valeur pour 1 (le prix d'un kilo, d'un article), puis on multiplie.

On peut ranger les valeurs dans un tableau, en écrivant le nom de chaque grandeur et son unité.

Pourcentage : prendre t % d'une quantité, c'est

$$\text{quantité} \times \frac{t}{100}$$

Échelle : sur un plan à l'échelle $\frac{1}{n}$, une longueur réelle est n fois plus grande que sur le plan (mêmes unités).

Correction de l'exercice 1 – Reconnaître un tableau de proportionnalité

On cherche si l'on passe toujours de la valeur du haut à celle du bas en multipliant par le même nombre.

— Tableau A : $2 \times 3 = 6$; $5 \times 3 = 15$; $8 \times 3 = 24$. On multiplie toujours par 3 : c'est un tableau de proportionnalité.
— Tableau B : $1 \times 4 = 4$, mais $3 \times 4 = 12$, et non 9. Ce n'est **pas** un tableau de proportionnalité.

Autre façon de voir le tableau B : quand on passe de 1 à 3 (trois fois plus), la valeur passe de 4 à 9, qui n'est pas trois fois plus :

$$3 \times 4 = 12 \neq 9$$

Une suite qui augmente régulièrement (+5 à chaque fois) n'est pas forcément proportionnelle.

Réponse. A : oui (on multiplie toujours par 3) · B : non.

Correction de l'exercice 2 – Proportionnel ou pas ?

On se demande si l'on passe d'une grandeur à l'autre en multipliant toujours par le même nombre.

a) **Oui** : prix = nombre de baguettes ×1,20. Deux fois plus de baguettes coûtent deux fois plus cher.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) **Non** : un enfant de 10 ans n'est pas deux fois plus grand qu'un enfant de 5 ans.

c) **Oui** : le périmètre d'un carré vaut toujours 4 fois le côté,

$$P = 4 \times c$$

d) **Non** : pour 1 entrée on paie 13 €, pour 2 entrées 16 €, et non 26 €. Les 10 € d'inscription empêchent la proportionnalité.

— **Méthode** : pour dire non, un seul contre-exemple suffit (ici, doubler le nombre d'entrées ne double pas le prix).

Réponse. a) oui · b) non · c) oui · d) non.

Correction de l'exercice 3 – Le prix d'un kilo

a) On partage le prix en 4 : 7,20 ÷ 4 = 1,80 €. Un kilogramme coûte 1,80 € : c'est le **prix au kilo**.

b) On passe par l'unité : 2,5 kg coûtent 2,5 fois le prix d'un kilo,

$$2{,}5 \times 1{,}80 = 4{,}50 \text{ €}$$

c) Chaque kilogramme coûte 1,80 € : avec 9 €, on achète 9 ÷ 1,80 = 5 kg.

Vérification : 4 × 1,80 = 7,20 €, on retrouve bien le prix de l'énoncé.

Réponse. a) 1,80 € — b) 4,50 € — c) 5 kg.

Correction de l'exercice 4 – Compléter un tableau avec le prix au kilo

La colonne « 1 kg » donne le prix au kilo : 1,80 €.

— Pour 3 kg, trois fois plus : 3 × 1,80 = 5,40 €.
— Pour 9 €, on cherche combien de fois 1,80 € on peut payer : 9 ÷ 1,80 = 5 kg.
— Pour 10 kg : 10 × 1,80 = 18 €.

Masse (kg)	**1**	**3**	**5**	**10**
Prix (€)	1,80	5,40	9,00	18,00

Contrôle en additionnant : 5 kg, c'est 3 kg plus 2 kg, donc

$$5{,}40 + 2 \times 1{,}80 = 5{,}40 + 3{,}60 = 9 \text{ €}$$

Réponse. 5,40 € ; 5 kg ; 18 €.

Correction de l'exercice 5 – Passer par l'unité

Le prix est proportionnel au nombre de cahiers. On calcule d'abord le prix d'**un** cahier, puis celui de 11.

— Un cahier : 9,60 ÷ 6 = 1,60 €.
— Onze cahiers :

$$11 \times 1{,}60 = 17{,}60 \text{ €}$$

Cahiers	**6**	**1**	**11**
Prix (€)	9,60	1,60	17,60

— **Pourquoi passer par l'unité ?** 11 n'est ni un multiple ni un diviseur simple de 6 : on ne peut pas passer directement de 6 à 11 en multipliant par un nombre entier.
— **Ordre de grandeur** : 11 cahiers, c'est presque le double de 6 ; 17,60 € est presque le double de 9,60 €

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. 17,60 €.

Correction de l’exercice 6 – Une recette pour plus de personnes

Les quantités sont proportionnelles au nombre de personnes. On passe de 4 à 12 personnes en multipliant par 3 ($12 = 4 \times 3$) : toutes les quantités sont multipliées par 3.

$$4 \times 3 = 12 \quad \Longrightarrow \quad \text{chaque quantité} \times 3$$

— Farine : $150 \times 3 = 450$ g.
— Œufs : $2 \times 3 = 6$ œufs.
— Sucre : $80 \times 3 = 240$ g.

Personnes	**4**	**12**
Farine (g)	150	450
Sucre (g)	80	240

— **Remarque** : on n’a pas eu besoin de passer par l’unité ; on a remarqué qu’une quantité était 3 fois l’autre, ce qui est plus rapide ici.

Réponse. 450 g de farine, 6 œufs, 240 g de sucre.

Correction de l’exercice 7 – Additionner deux colonnes

Le prix est proportionnel au nombre de stylos : on peut **additionner** ou **soustraire** deux colonnes.

a) $8 = 3 + 5$, donc le prix de 8 stylos est la somme des deux prix :

$$2{,}40 + 4 = 6{,}40 \text{ €}$$

b) $2 = 5 - 3$, donc le prix de 2 stylos est la différence : $4 - 2{,}40 = 1{,}60$ €.

Stylos	**3**	**5**	**8**	**2**
Prix (€)	2,40	4	6,40	1,60

— **Vérification** par l’unité : un stylo coûte $4 \div 5 = 0{,}80$ €, et $8 \times 0{,}80 = 6{,}40$ € ; $2 \times 0{,}80 = 1{,}60$ €

Réponse. a) 6,40 € · b) 1,60 €.

Correction de l’exercice 8 – Des crêpes pour 9

9 n’est pas un multiple de 6, mais $9 = 6 + 3$, et 3 est la **moitié** de 6.

— Pour 3 personnes (moitié de 6) : $300 \div 2 = 150$ g de farine et $60 \div 2 = 30$ cl de lait.
— Pour $9 = 6 + 3$ personnes, on additionne les deux colonnes :

$$300 + 150 = 450 \text{ g} \qquad 60 + 30 = 90 \text{ cl}$$

Personnes	**6**	**3**	**9**
Farine (g)	300	150	450
Lait (cl)	60	30	90

— **Autre méthode** : par personne, $300 \div 6 = 50$ g de farine, donc $9 \times 50 = 450$ g

Réponse. 450 g de farine et 90 cl de lait.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 9 – Le plein d’essence

Le prix d’un litre est 1,85 € : on multiplie le volume par 1,85.

— 10 L : $10 \times 1{,}85 = 18{,}50$ € (multiplier par 10 décale la virgule).
— 20 L : le double de 10 L, soit 37 €.
— 45 L : $45 \times 1{,}85 = 83{,}25$ €.

Pour 74 € : $74 = 2 \times 37$, donc c’est le double de 20 L, soit 40 L. On peut aussi diviser par le prix d’un litre :

$$74 \div 1{,}85 = 40 \text{ L}$$

— **Contrôle** : $40 \times 1{,}85 = 74$ €

Réponse. 18,50 € ; 37 € ; 83,25 € ; 40 L pour 74 €.

Correction de l’exercice 10 – Lire une carte à l’échelle

a) On convertit : 100 000 cm = 1 000 m = 1 km. Donc 1 cm sur la carte représente 1 km.

b) Les distances réelles sont proportionnelles aux distances sur la carte :

$$7 \times 100\,000 = 700\,000 \text{ cm} = 7 \text{ km}$$

c) Chaque kilomètre réel fait 1 cm sur la carte : 12 km donnent 12 cm.

Carte (cm)	**1**	**7**	**12**
Réel (km)	1	7	12

— **Conversion utile** : 1 km = 1 000 m = 100 000 cm.
— **Attention** : l’échelle compare des longueurs dans la **même unité** ; on ne convertit en km qu’à la fin.

Réponse. a) 1 km · b) 7 km · c) 12 cm.

Correction de l’exercice 11 – Le plan d’une maison

À l’échelle $\frac{1}{50}$, les longueurs réelles sont 50 fois plus grandes que sur le plan.

$$\text{longueur réelle} = \text{longueur sur le plan} \times 50$$

a) Longueur : $12 \times 50 = 600$ cm = 6 m. Largeur : $9 \times 50 = 450$ cm = 4,5 m.

b) On fait l’opération inverse : on convertit d’abord, 0,90 m = 90 cm, puis $90 \div 50 = 1{,}8$ cm sur le plan.

— **Vérification** : $1{,}8 \times 50 = 90$ cm
— **Ordre de grandeur** : un salon de 6 m sur 4,5 m, soit 27 m², est une taille réaliste.

Réponse. a) 6 m sur 4,5 m · b) 1,8 cm.

Correction de l’exercice 12 – Calculer un pourcentage

Prendre t % d’une quantité, c’est la multiplier par $\frac{t}{100}$:

$$t\,\% \text{ de } N = N \times \frac{t}{100}$$

a) 50 %, c’est la **moitié** : $36 \div 2 = 18$.
b) 25 %, c’est le **quart** : $80 \div 4 = 20$.
c) 10 %, c’est le **dixième** : $450 \div 10 = 45$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) 20 %, c’est 2 fois 10 % : 10 % de 45 vaut 4,5, donc 20 % vaut 9.

— **Contrôle de d)** : $45 \times \frac{20}{100} = \frac{900}{100} = 9$

— **À connaître** : $50\,\% = \frac{1}{2}$, $25\,\% = \frac{1}{4}$, $10\,\% = \frac{1}{10}$, $75\,\% = \frac{3}{4}$.

Réponse. a) 18 · b) 20 · c) 45 · d) 9.

Correction de l’exercice 13 – Les soldes

a) La réduction vaut 30 % du prix de départ :

$$60 \times \frac{30}{100} = \frac{1\,800}{100} = 18\ €$$

Calcul mental : 10 % de 60 vaut 6, donc 30 % vaut $3 \times 6 = 18$ €.

b) On retire la réduction du prix de départ : $60 - 18 = 42$ €.

— **Contrôle** : on paie $100\,\% - 30\,\% = 70\,\%$ du prix, et 70 % de 60 vaut $7 \times 6 = 42$ €

— **Piège** : le prix soldé n’est pas 30 € ; « 30 % » n’est pas « 30 € ».

Réponse. a) 18 € · b) 42 €.

Correction de l’exercice 14 – Quel paquet est le moins cher ?

Pour comparer, on ramène les deux prix à la **même quantité** : 1 kg = 1 000 g.

Or $1\,000 = 4 \times 250$: quatre petits paquets font 1 kg. Si le prix était proportionnel à la masse, 1 kg en petits paquets coûterait

$$4 \times 3{,}10 = 12{,}40\ €$$

Le grand paquet coûte 11,60 € pour la même masse : il est **plus avantageux**, de $12{,}40 - 11{,}60 = 0{,}80$ € par kilogramme.

— **Méthode** : on compare des **prix au kilogramme**, comme sur les étiquettes des magasins.

— **Remarque** : dans les magasins, le prix n’est pas toujours proportionnel à la quantité ; c’est pour cela qu’il faut comparer.

Réponse. Le paquet de 1 kg (11,60 €/kg contre 12,40 €/kg).

Correction de l’exercice 15 – Une offre trompeuse

a) S’il y avait proportionnalité, 4 yaourts coûteraient

$$4 \times 0{,}60 = 2{,}40\ €$$

Le lot coûte 2 € : ce n’est **pas** proportionnel. Dans le lot, un yaourt revient à $2 \div 4 = 0{,}50$ €.

b) Léo prend un lot de 4 et 2 yaourts à l’unité :

— $2 + 2 \times 0{,}60 = 2 + 1{,}20 = 3{,}20$ €.

Deux lots (8 yaourts) coûteraient 4 € : plus cher, même si l’on a 2 yaourts de plus.

— **À retenir** : une promotion « par lot » casse la proportionnalité ; le prix n’est plus le même pour chaque article.

Réponse. a) non · b) 3,20 €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).