

Plaquette 1 - Axes de symétrie, images et propriétés conservées

Symétrie axiale — Sixième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Ce qu'il faut savoir.

- Le **symétrique** M' d'un point M par rapport à une droite d est tel que d est la **médiatrice** de $[MM']$: si I est le point d'intersection de (MM') et de d ,

$$(MM') \perp d \quad \text{et} \quad MI = IM'$$
- Si M appartient à d , alors $M' = M$: les points de l'axe sont leur propre image.
- Un **axe de symétrie** d'une figure est une droite telle que la figure se superpose à elle-même par pliage le long de cette droite.
- La symétrie axiale **conserve** : les longueurs, les mesures d'angles, les aires, le parallélisme, les milieux et l'alignement.
- Elle **change** l'orientation : la figure est « retournée », comme dans un miroir.
- Axes de symétrie des figures usuelles : un carré en a 4, un rectangle (non carré) 2, un losange (non carré) 2, un triangle isocèle 1, un triangle équilatéral 3, un cercle une **infinité**, un parallélogramme quelconque **aucun**.
- Pour construire une image : on utilise l'équerre (perpendiculaire) et le compas (report de longueur), ou le quadrillage en comptant les carreaux.

Correction de l'exercice 1 - Définition du symétrique

- a) Par définition du cours, d est la **médiatrice** du segment $[MM']$.
 b) La médiatrice passe par le **milieu** du segment :

$$MI = IM'$$

- c) La médiatrice est **perpendiculaire** au segment : l'angle vaut 90° .
- Ces trois propriétés suffisent à construire M' : on trace la perpendiculaire à d passant par M , puis on reporte la distance de l'autre côté.

Réponse. a) sa médiatrice · b) $MI = IM'$ · c) 90° .

Correction de l'exercice 2 - Points de l'axe

- Le symétrique de A est A **lui-même**.
- Justification : par pliage le long de d , les points de l'axe ne bougent pas. On dit qu'ils sont **invariants**.
- Conséquence utile : si une figure a un axe de symétrie, tous les points de cet axe appartenant à la figure sont leur propre image.

Réponse. A est sa propre image (point invariant).

Correction de l'exercice 3 - Axes de symétrie des figures usuelles

On compte les pliages qui superposent la figure à elle-même :

carré:4 rectangle:2 triangle équilatéral:3

- a) Le carré a 4 axes (dessinés sur la figure) : les deux médiatrices des côtés et les deux diagonales.

- b) Le rectangle non carré a 2 axes : les médiatrices de ses côtés. Ses diagonales ne sont **pas** des axes de symétrie.
- c) Le triangle équilatéral a 3 axes : les médiatrices de ses côtés (qui sont aussi ses hauteurs).
- d) Le parallélogramme quelconque n'a **aucun** axe de symétrie. Il a en revanche un centre de symétrie (notion de cinquième).

Réponse. a) 4 · b) 2 · c) 3 · d) aucun.

Correction de l'exercice 4 - Axes d'un losange

- a) Le losange non carré a 2 axes de symétrie : ses deux **diagonales**.
- En effet, le pliage le long d'une diagonale superpose exactement les deux moitiés, car les quatre côtés sont égaux.
- b) Les médiatrices des côtés ne conviennent pas : par un tel pliage, les sommets « pointus » ne viennent pas sur les sommets « pointus ». Contrairement au rectangle, les angles d'un losange ne sont pas tous égaux.
- Récapitulatif : le rectangle a pour axes les médiatrices des côtés, le losange ses diagonales, et le carré les quatre à la fois.

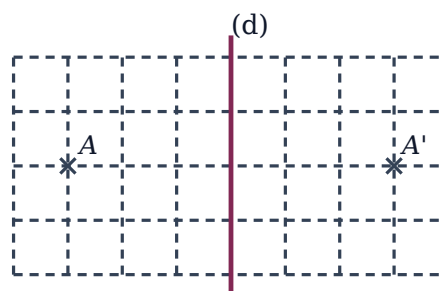
Réponse. a) 2 axes : ses diagonales · b) parce que ses angles ne sont pas tous égaux.

Correction de l'exercice 5 - Construire une image sur quadrillage

Méthode du quadrillage : on compte les carreaux **perpendiculairement** à l'axe, et on reporte de l'autre côté.

- A est à 3 carreaux à gauche de d : donc A' est à 3 carreaux **à droite** de d .
- La distance verticale ne change pas : A' reste à 2 carreaux au-dessus du même repère.
- Contrôle : le segment $[AA']$ est horizontal (donc perpendiculaire à l'axe vertical) et son milieu est sur d , à 3 carreaux de chaque point.

Réponse. A' est à 3 carreaux à droite de d , à la même hauteur.



Correction de l'exercice 6 - Compléter une figure sur quadrillage

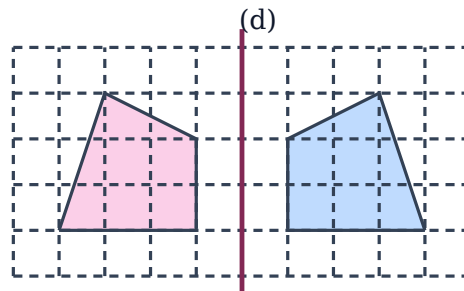
On construit l'image de chaque sommet, puis on relie les images dans le même ordre. Pour un axe vertical, on compte les carreaux horizontalement jusqu'à l'axe, et on en compte autant de l'autre côté ; la hauteur ne change pas :

distance à l'axe de l'image = distance à l'axe du point

- Le sommet à 4 carreaux de l'axe (en bas à gauche) a son image à 4 carreaux à droite de l'axe.
- Le sommet à 1 carreau de l'axe a son image à 1 carreau de l'autre côté.

La figure image est « retournée » : elle se superpose à la figure de départ par pliage le long de (d) .

Réponse. Voir la figure : chaque sommet est reporté à la même distance de l'autre côté de (d) .



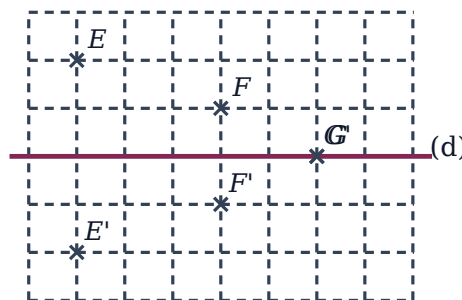
Correction de l'exercice 7 - Un axe horizontal

Avec un axe horizontal, on compte les carreaux **verticalement** jusqu'à l'axe, puis on en reporte autant de l'autre côté ; la position horizontale ne change pas.

$(EE') \perp (d)$ et (d) passe par le milieu de $[EE']$

- E est à 2 carreaux au-dessus de (d) : E' est 2 carreaux en dessous.
- F est à 1 carreau au-dessus : F' est 1 carreau en dessous.
- G est **sur** l'axe : $G' = G$, il est sa propre image.

Réponse. E' et F' sous l'axe, à 2 et 1 carreaux ; $G' = G$.



Correction de l'exercice 8 - Retrouver l'axe

Un point et son image sont à la même distance de l'axe, de part et d'autre : l'axe passe par le **milieu** de chaque segment $[MM']$ et lui est perpendiculaire.

On relie un sommet rose à son image bleue : le segment est vertical. Le sommet du bas de la figure rose est sur la ligne 5 du quadrillage, son image sur la ligne 2 :

$$\text{milieu: } \frac{5 + 2}{2} = 3,5$$

L'axe est donc la droite **horizontale** qui passe à mi-hauteur, entre les lignes 3 et 4 du quadrillage (à 3,5 carreaux du bas).

Réponse. L'axe horizontal situé à mi-chemin entre les deux figures (hauteur 3,5

carreaux).

Correction de l'exercice 9 - Propriétés conservées

La symétrie axiale **conserve** les longueurs, les angles et les aires.

$$A' = A \quad \text{longueurs et angles inchangés}$$

- Aire : 24 cm^2 (inchangée).
- Longueur du côté : 5 cm (inchangée).
- Mesure de l'angle : 37° (inchangée).
- Ce qui change, c'est seulement l'**orientation** : la figure image est « retournée », comme le reflet dans un miroir.

Réponse. 24 cm^2 , 5 cm et 37° : tout est conservé.

Correction de l'exercice 10 - Calculer sans mesurer

a) Les longueurs et les angles sont conservés :

$$A'B' = AB = 6 \text{ cm} \quad B'C' = BC = 4 \text{ cm} \quad \hat{A}' = \hat{A} = 55^\circ$$

- b) Le périmètre est une somme de longueurs, toutes conservées : le périmètre de $A'B'C'$ vaut aussi **15 cm**.
- On en déduit d'ailleurs $AC = 15 - 6 - 4 = 5 \text{ cm}$, donc $A'C' = 5 \text{ cm}$.

Réponse. a) 6 cm , 4 cm , 55° · b) 15 cm .

Correction de l'exercice 11 - Symétrie et triangle isocèle

- a) L'axe de symétrie est la **médiatrice de** $[BC]$: elle passe par A , puisque $AB = AC$.
- b) Par ce pliage, B vient exactement sur C : le symétrique de B est donc C .
- c) La symétrie conservant les angles, l'angle en B a pour image l'angle en C :

$$\hat{B} = \hat{C}$$

- C'est la **démonstration** de la propriété « dans un triangle isocèle, les angles à la base sont égaux ».

Réponse. a) la médiatrice de $[BC]$ · b) le point C · c) $\hat{B} = \hat{C}$.

Correction de l'exercice 12 - Symétrique d'un segment et d'un cercle

- a) L'image d'un segment est un **segment de même longueur**. (La symétrie conserve l'alignement et les longueurs.)
- b) L'image d'un cercle est un **cercle de même rayon**, dont le centre est l'image O' du centre O :

$$r' = r = 3 \text{ cm}$$

- Cas particulier : si l'axe passe par O , alors $O' = O$ et le cercle est **sa propre image** — l'axe est alors un axe de symétrie du cercle.

Réponse. a) un segment de même longueur · b) un cercle de rayon 3 cm , de centre O' .

Correction de l'exercice 13 - Trouver les axes d'une figure

On cherche les pliages qui superposent la lettre à elle-même.

- a) La lettre **A** a 1 axe : la verticale passant par son sommet.
- b) La lettre **H** a 2 axes : la verticale médiane et l'horizontale médiane.

- c) La lettre **S** n'a **aucun** axe de symétrie. (Elle possède en revanche un centre de symétrie.)
- Méthode pratique : on imagine le pliage, ou on utilise un miroir posé le long de la droite testée.

Réponse. a) 1 · b) 2 · c) aucun.

Correction de l'exercice 14 - Problème : compléter une figure

- a) L'image P' est de l'**autre côté** de d , sur la perpendiculaire à d passant par P , et à la même distance : 4 cm.
- b) La longueur est conservée : l'image mesure aussi 7 **cm**.
- c) L'extrémité située **sur** d est invariante : elle est sa propre image. Les deux segments se rejoignent donc en ce point.
- Conséquence : la figure complétée est symétrique, et l'angle formé en ce point est partagé en deux parties égales par d .

Réponse. a) à 4 cm de l'autre côté, sur la perpendiculaire · b) 7 cm · c) elle ne bouge pas.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : vrai ou faux

- a) **Vrai.** Aires, longueurs et angles sont tous conservés.
- b) **Faux.** Un rectangle non carré n'a que 2 axes (les médiatrices de ses côtés) ; c'est le **carré** qui en a 4.
- c) **Vrai.** Les points de l'axe sont invariants.
- d) **Vrai.** Toute droite passant par le centre est un axe de symétrie du cercle.

Réponse. a) vrai · b) faux · c) vrai · d) vrai.