

Plaquette 5 - Propriétés de la symétrie : calculer et justifier

Symétrie axiale — Sixième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Ce que conserve la symétrie axiale.

- **Longueurs** : $A'B' = AB$. **Angles** : $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$. **Aires** : une figure et son image ont la même aire.

$$A'B' = AB \quad \widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC} \quad A' = A$$

- **Alignement** : l'image de points alignés est formée de points alignés. **Milieu** : si I est le milieu de $[AB]$, I' est le milieu de $[A'B']$. **Parallélisme** : l'image de deux droites parallèles est formée de deux droites parallèles.
- Dans une figure qui a un **axe de symétrie**, les éléments qui s'échangent par pliage sont égaux : longueurs, angles, aires des deux moitiés.
- Aire d'une figure symétrique : le double de l'aire d'une moitié.
- La symétrie ne conserve pas l'**orientation** : la figure est retournée.

Correction de l'exercice 1 - Le cerf-volant : calculer sans mesurer

a) Par la symétrie d'axe (AC) , A et C sont fixes et B a pour image D . Les longueurs et les angles sont conservés :

$$AD = AB = 2,5 \text{ cm} \quad DC = BC = 4 \text{ cm} \quad \widehat{ADC} = \widehat{ABC} = 100^\circ$$

b) $P = 2,5 + 4 + 4 + 2,5 = 13 \text{ cm}$.

Réponse. a) 2,5 cm, 4 cm, 100° · b) 13 cm.

Correction de l'exercice 2 - Les angles à la base

Le triangle est isocèle en A : sa médiatrice de $[BC]$, qui passe par A , est un axe de symétrie. Par ce pliage, B vient sur C et A reste en place : l'angle $\widehat{ABC}$ a pour image l'angle $\widehat{ACB}$.

La symétrie conserve les angles :

$$\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = 65^\circ$$

Réponse. 65° .

Correction de l'exercice 3 - L'aire d'une figure symétrique

Les deux moitiés sont symétriques l'une de l'autre ; la symétrie conserve les aires, donc elles ont la même aire.

$$A_{\text{figure}} = 2 \times A_{\text{moitié}}$$

— Figure : $2 \times 12,5 = 25 \text{ cm}^2$.

— Papillon : ses deux ailes sont symétriques par rapport à l'axe du corps : $2 \times 15 = 30 \text{ cm}^2$.

Réponse. 25 cm^2 et 30 cm^2 .

Correction de l'exercice 4 - Le reflet dans le lac

La surface de l'eau joue le rôle de l'axe ; la symétrie conserve les longueurs.

- a) Le reflet de l'arbre mesure aussi 6 m, vers le bas.
b) L'oiseau est à 4 m de l'axe : son reflet est à 4 m sous la surface, et :
$$\text{distance oiseau-reflet} = 2 \times 4 = 8 \text{ m}$$

Réponse. a) 6 m · b) 4 m sous l'eau ; 8 m.

Correction de l'exercice 5 - Le papier plié

Le pli joue le rôle d'axe : ce qu'on découpe dans une épaisseur est découpé aussi dans l'autre, à l'endroit symétrique.

- a) Le demi-cœur découpé **sur le pli** donne un seul trou : un cœur entier, symétrique par rapport au pli. Le petit rond découpé **à côté** du pli donne **deux** ronds, symétriques l'un de l'autre. En tout : 3 trous.
b) L'axe de symétrie est la ligne du pli.

découpe sur le pli:1 trou ailleurs:2 trous

Réponse. a) 3 trous : un cœur et deux ronds · b) la ligne du pli.

Correction de l'exercice 6 - Au billard

On admet que le rebond fonctionne comme un reflet : la trajectoire de sortie est la symétrique de la trajectoire d'entrée par rapport à la perpendiculaire à la bande au point de contact. La symétrie conserve les angles :

$$\text{angle de sortie} = \text{angle d'arrivée} = 35^\circ$$

C'est la même règle que pour un rayon de lumière sur un miroir. Les joueurs s'en servent pour viser une boule « par la bande ».

Réponse. 35° : les angles sont conservés.

Correction de l'exercice 7 - Le plus court chemin

- a) M est sur l'axe, donc $M' = M$. L'image du segment $[AM]$ est $[A'M]$, de même longueur :
$$AM = A'M$$

b) Le trajet $AM + MB$ a la même longueur que $A'M + MB$. Or le chemin le plus court entre A' et B est la ligne droite : il faut placer M à l'intersection du segment $[A'B]$ et de la rivière. Sur la figure, M est justement placé ainsi.

Réponse. a) M est sur l'axe · b) à l'intersection de $[A'B]$ et de (d) .

Correction de l'exercice 8 - Alignement et milieu conservés

- a) **Oui** : la symétrie axiale conserve l'alignement.
b) Elle conserve les longueurs : $A'B' = AB$ et $B'C' = BC$. Comme $AB = BC$, on a $A'B' = B'C'$, et B' est sur $[A'C']$: c'est son **milieu**.

$$A'B' = AB = \frac{AC}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ cm}$$

Réponse. a) oui · b) B' est le milieu de $[A'C']$; $A'B' = 4 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 9 - Parallèles conservées

La symétrie axiale conserve le parallélisme et les angles.

— $(d_1) \parallel (d_2)$, donc :

$$(d_1') \parallel (d_2')$$

— Si $(d_1) \perp (d_3)$, l'angle droit est conservé : $(d_1') \perp (d_3')$.

C'est pour cela que l'image d'un rectangle est un rectangle, celle d'un parallélogramme un parallélogramme.

Réponse. $(d_1') \parallel (d_2')$; et $(d_1') \perp (d_3')$.

Correction de l'exercice 10 - La maison codée

Par la symétrie d'axe vertical, le mur de droite est l'image du mur de gauche, et le pan droit du toit est l'image du pan gauche. Longueurs conservées :

$$\text{mur droit} = 6 \text{ cm} \quad \text{pan droit} = 6,4 \text{ cm}$$

Périmètre (base, deux murs, deux pans) :

— $10 + 6 + 6 + 6,4 + 6,4 = 34,8 \text{ cm}$.

Réponse. 34,8 cm.

Correction de l'exercice 11 - Un point sur la médiatrice

a) (d) est la médiatrice de $[AB]$: par définition, le symétrique de A par rapport à (d) est B .

b) M est sur l'axe : $M' = M$. L'image de $[MA]$ est $[MB]$:

$$MB = MA = 7 \text{ cm}$$

Le triangle MAB est **isocèle en M** . On retrouve la propriété des points de la médiatrice, démontrée par la symétrie.

Réponse. a) $B \cdot b) MB = 7 \text{ cm}$; isocèle en M .

Correction de l'exercice 12 - Lire dans un miroir

Le miroir vertical est un axe vertical : chaque lettre est retournée de gauche à droite, et l'ordre des lettres est inversé.

— M et A ont un axe vertical : elles apparaissent inchangées.

— N n'a pas d'axe vertical : elle apparaît retournée.

$$\text{MAMAN} \rightarrow \text{« NAMAM » avec un N retourné}$$

Le mot ne se lit donc pas pareil : il faudrait un palindrome dont toutes les lettres ont un axe vertical, comme OTTO.

Réponse. M et A inchangées ; on lit « NAMAM » avec un N retourné.

Correction de l'exercice 13 - Figure et image : comparer

a) La symétrie conserve les longueurs et les angles : $A'B'C'D'$ a quatre angles droits et les mêmes côtés. C'est un **rectangle** de 6 cm sur 3,5 cm.

b) Périmètre et aire sont conservés :

$$P' = 2 \times (6 + 3,5) = 19 \text{ cm} \quad A' = 6 \times 3,5 = 21 \text{ cm}^2$$

Réponse. a) un rectangle de mêmes dimensions · b) 19 cm et 21 cm².

Correction de l'exercice 14 - Deux figures qui se chevauchent

a) Le carré s'étend de 3 cm à gauche à 1 cm à droite de l'axe ; son image, de 1 cm à gauche à 3 cm à droite. La partie commune est une bande de $1 + 1 = 2$ cm de large sur 4 cm de haut :

$$A_{\text{commune}} = 2 \times 4 = 8 \text{ cm}^2$$

b) Le carré et son image ont chacun une aire de 16 cm^2 ; on compte une seule fois la partie commune :

— $16 + 16 - 8 = 24 \text{ cm}^2$. C'est un rectangle de 6 cm sur 4 cm.

Réponse. a) 8 cm^2 · b) 24 cm^2 .

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : vrai ou faux

a) **Vrai.** L'angle droit est conservé.

b) **Vrai.** La symétrie conserve l'alignement et les longueurs, donc les milieux.

c) **Faux.** La figure image est retournée, comme dans un miroir.

d) **Vrai.** Les deux moitiés sont symétriques, donc de même aire :

$$A = 2 \times A_{\text{moitié}}$$

Réponse. a) vrai · b) vrai · c) faux · d) vrai.