Plaquette 4 – Assemblages de cubes : vues et dénombrement

Volumes et solides — Sixième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Compter les cubes d'un assemblage.

— Colonne par colonne : on additionne les hauteurs des colonnes.

— Couche par couche : on additionne les cubes de chaque étage.

Vues. La **vue de dessus** montre les colonnes occupées ; la **vue de face** montre, pour chaque colonne de devant, la plus grande hauteur.

Plan coté : une vue de dessus où chaque case porte le nombre de cubes empilés à cet endroit. Le nombre total de cubes est la **somme** des nombres du plan :

$$\text{nombre de cubes} = \text{somme des hauteurs de toutes les colonnes}$$

Volume : un assemblage de n cubes de 1 cm a un volume de n cm³.

Cubes cachés. Dans un grand cube de $n \times n \times n$, les cubes qu'on ne voit d'aucun côté forment un cube de $(n-2) \times (n-2) \times (n-2)$.

Correction de l'exercice 1 – Un escalier de cubes

On additionne les hauteurs des trois colonnes :

$$1 + 2 + 3 = 6 \text{ cubes}$$

L'escalier a un volume de 6 cm³.

Pour un escalier de 4 marches, il faudrait $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ cubes ; pour 10 marches, 55 cubes. Le nombre de cubes augmente de plus en plus vite : chaque nouvelle marche ajoute une colonne plus haute que la précédente.

Réponse. 6 cubes ; 6 cm³.

Correction de l'exercice 2 – Lire un plan coté

Le nombre de cubes est la somme des nombres du plan :

$$2 + 1 + 3 + 1 + 1 + 2 = 10 \text{ cubes}$$

L'assemblage a un volume de 10 cm³ (avec des cubes de 1 cm). La plus haute colonne, au fond à droite, compte 3 cubes. Le plan coté permet de compter tous les cubes, même ceux qui seraient cachés sur un dessin en perspective.

Réponse. 10 cubes ; 3 cubes de haut.

Correction de l'exercice 3 – La vue de dessus

La vue de dessus montre les 6 cases occupées (une grille de 3 colonnes sur 2 rangées), comme sur la figure. On y voit le dessus de la colonne la plus haute de chaque case.

Elle ne suffit pas pour compter les cubes : une case peut porter 1, 2 ou 3 cubes, la vue de dessus est la même.

$$\text{nombre de cubes} \geq 6$$

C'est pour cela qu'on ajoute les hauteurs dans un plan coté.

Réponse. Les 6 cases occupées ; non, il faut aussi les hauteurs.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 4 – La vue de face

Vue de face, on voit, dans chaque colonne (gauche, milieu, droite), la plus haute pile, qu’elle soit devant ou au fond :

— gauche : $\max(1\,;2) = 2$ carrés ;
— milieu : $\max(1\,;1) = 1$ carré ;
— droite : $\max(2\,;3) = 3$ carrés.

La vue de face montre donc $2 + 1 + 3 = 6$ carrés, alors que l’assemblage compte 10 cubes : les cubes de devant cachent en partie ceux du fond.

Réponse. 2, 1 et 3 carrés.

Correction de l’exercice 5 – Les cubes cachés

Le grand cube contient $3 \times 3 \times 3 = 27$ petits cubes.

Un petit cube est invisible s’il n’est sur aucune face du grand cube : il est au centre. Si l’on retire la couche extérieure de chaque côté, il reste un cube de

$$(3-2) \times (3-2) \times (3-2) = 1$$

petit cube. Un seul petit cube est caché : celui du centre ; les 26 autres touchent l’extérieur.

Réponse. 27 cubes ; 1 caché.

Correction de l’exercice 6 – Une pyramide de cubes

On compte étage par étage :

$$3 \times 3 + 2 \times 2 + 1 \times 1 = 9 + 4 + 1 = 14 \text{ cubes}$$

Avec un étage de 4×4 en plus en dessous : $16 + 14 = 30$ cubes.

Chaque étage est un carré de cubes : on additionne les nombres 1, 4, 9, 16…

Réponse. 14 cubes ; 30 cubes.

Correction de l’exercice 7 – Compléter en un grand cube

Les grands cubes pleins contiennent 1, 8, 27, 64… petits cubes ($1 \times 1 \times 1$, $2 \times 2 \times 2$, $3 \times 3 \times 3$…).

Avec 10 cubes, on dépasse 8 : le plus petit grand cube possible est celui de $3 \times 3 \times 3 = 27$ cubes.

$$27 - 10 = 17$$

Il faut ajouter au moins 17 cubes (en supposant que l’assemblage tienne dans un cube de 3 de côté).

Réponse. 17 cubes.

Correction de l’exercice 8 – Les faces peintes

On classe les petits cubes selon leur position :

— les **coins** ont 3 faces peintes : il y en a 8 ;
— les cubes au **milieu d’une arête** ont 2 faces peintes : 1 par arête, soit 12 ;
— les cubes au **centre d’une face** ont 1 face peinte : 1 par face, soit 6 ;
— le cube **central** n’a aucune face peinte : 1.

Contrôle : $8 + 12 + 6 + 1 = 27$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. 8 ; 12 ; 6 ; 1.

Correction de l’exercice 9 – Reconnaître un patron de cube

Figure A : une bande de 4 carrés forme le tour du cube, et les deux carrés placés de part et d’autre forment le dessus et le dessous. En pliant, on obtient un cube : c’est un patron.

Figure B : c’est un rectangle de 2×3 carrés. En pliant, trois carrés se superposent sur un même côté, et il manque une face d’un autre côté : ce n’est pas un patron de cube.

Un patron de cube a toujours 6 carrés, mais

$$6 \text{ carrés}$$

ne suffisent pas : la disposition compte.

Réponse. A est un patron ; B n’en est pas un.

Correction de l’exercice 10 – Une tour de cubes

Chaque cube a 4 faces sur les côtés, toutes visibles : $5 \times 4 = 20$ faces. Il faut ajouter la face du dessus du cube le plus haut.

$$20 + 1 = 21 \text{ faces}$$

Les faces collées entre deux cubes (4 paires) et la face posée sur la table sont cachées : $5 \times 6 = 30$ faces au total, dont $30 - 21 = 9$ cachées.

Réponse. 21 faces visibles.

Correction de l’exercice 11 – Repérer une erreur

Non. Elle a compté des **faces** de cubes, pas des cubes : certains cubes montrent deux ou trois faces (sur les arêtes et les coins), d’autres n’en montrent aucune.

On compte par couches : une couche de $4 \times 2 = 8$ cubes, et 2 couches,

$$8 \times 2 = 16 \text{ cubes}$$

Sur le dessin, on voit 8 carrés devant, 8 dessus et 4 sur le côté, d’où les 20 carrés d’Inès, pour seulement 16 cubes.

Réponse. Non : 16 cubes (elle a compté 20 faces).

Correction de l’exercice 12 – Volume d’un assemblage en L

On découpe l’assemblage en deux pavés et l’on additionne :

$$3 \times 2 \times 1 + 1 \times 2 \times 2 = 6 + 4 = 10 \text{ cubes}$$

Le volume vaut 10 cm^3.

Contrôle colonne par colonne : la base a $3 \times 2 = 6$ colonnes ; les 2 colonnes situées sous le second pavé ont 3 cubes, les 4 autres en ont 1, soit $2 \times 3 + 4 \times 1 = 10$ cubes.

Réponse. 10 cubes ; 10 cm^3.

Correction de l’exercice 13 – Huit cubes, plusieurs formes

On cherche trois nombres entiers dont le produit vaut 8 :

$$2 \times 2 \times 2 = 8 \qquad 1 \times 2 \times 4 = 8 \qquad 1 \times 1 \times 8 = 8$$

On obtient un cube de 2 cm d’arête, un pavé de $1 \times 2 \times 4$ et une barre de $1 \times 1 \times 8$. Ils ont tous le même volume, 8 cm^3, puisqu’ils utilisent les mêmes 8 cubes.

Réponse. Le cube $2 \times 2 \times 2$, le pavé $1 \times 2 \times 4$ et la barre $1 \times 1 \times 8$; même volume, 8 cm^3.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 14 – Le plus grand cube possible

On calcule les volumes des cubes successifs : $3 \times 3 \times 3 = 27$, $4 \times 4 \times 4 = 64$, $5 \times 5 \times 5 = 125$.

Avec 100 cubes, on ne peut pas atteindre 125 : le plus grand cube plein a une arête de 4 cm et utilise 64 cubes.

$$100 - 64 = 36$$

Il reste 36 petits cubes, pas assez pour passer au cube suivant, qui en demanderait 61 de plus.

Réponse. Un cube de 4 cm d’arête ; il reste 36 cubes.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : un plan coté complet

a) On additionne les nombres du plan : $3 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 1 + 1 = 14$ cubes, soit un volume de 14 cm³.

b) Vue de face : dans chaque colonne, la plus grande hauteur, $3 + 2 + 2 + 1 = 8$ carrés. Vue de dessus : les 8 cases occupées, 8 carrés.

c) Le pavé de $4 \times 2 \times 3$ contient 24 cubes :

$$24 - 14 = 10$$

Il faut ajouter 10 cubes.

Réponse. a) 14 cubes, 14 cm³ — b) 8 et 8 carrés — c) 10 cubes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).