Plaquette 5 – Problèmes de volumes

Volumes et solides — Sixième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Ranger des cubes dans une boîte. On compte combien d'objets tiennent dans chaque direction, puis on multiplie :

$$\text{nombre d'objets} = \text{dans la longueur} \times \text{dans la largeur} \times \text{dans la hauteur}$$

Dans chaque direction, on prend le **quotient entier** : avec 30 cm de long et des cubes de 7 cm, il en tient 4 (il reste 2 cm).

Remplir jusqu'à une hauteur : le volume rempli est celui d'un pavé de même fond et de hauteur égale à la hauteur atteinte.

Volume d'un cube de c cm : $c \times c \times c$ cm³ ; un cube de 2 cm d'arête contient 8 cubes de 1 cm.

Vérifier : un volume total doit être égal au nombre d'objets multiplié par le volume d'un objet, quand ils remplissent tout.

Correction de l'exercice 1 – Une boîte de sucres

Une couche au fond contient $12 \times 6 = 72$ morceaux. La boîte a 4 cm de haut, donc 4 couches :

$$72 \times 4 = 288 \text{ morceaux}$$

La boîte a un volume de 288 cm³. Ordre de grandeur : environ 300 morceaux, ce qui correspond aux boîtes du commerce.

Réponse. 288 morceaux.

Correction de l'exercice 2 – Ranger des dés

Dans la longueur : $10 \div 2 = 5$ dés ; dans la largeur : $8 \div 2 = 4$; dans la hauteur : $6 \div 2 = 3$ couches.

$$5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ dés}$$

Contrôle : la boîte a un volume de $10 \times 8 \times 6 = 480$ cm³ et chaque dé $2 \times 2 \times 2 = 8$ cm³ ; $60 \times 8 = 480$, les dés remplissent toute la boîte.

Réponse. 60 dés.

Correction de l'exercice 3 – Des boîtes dans un carton

Dans la longueur : $60 \div 20 = 3$ boîtes ; dans la largeur : $40 \div 10 = 4$; dans la hauteur : $30 \div 10 = 3$ couches.

$$3 \times 4 \times 3 = 36 \text{ boîtes}$$

Elles remplissent tout le carton : $36 \times (20 \times 10 \times 10) = 36 \times 2000 = 72\,000$ cm³, et le carton mesure $60 \times 40 \times 30 = 72\,000$ cm³.

Réponse. 36 boîtes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 4 – Des cubes qui ne remplissent pas tout

On prend le quotient entier dans chaque direction : $30 \div 7$ donne 4 (il reste 2 cm), $20 \div 7$ donne 2 (il reste 6 cm), $10 \div 7$ donne 1 (il reste 3 cm).

$$4 \times 2 \times 1 = 8 \text{ cubes}$$

Les cubes occupent $8 \times 343 = 2744$ cm³, la boîte mesure 6000 cm³ : il reste 3256 cm³ vides. Diviser 6000 par 343 (environ 17) serait faux : les cubes ne se découpent pas.

Réponse. 8 cubes ; 3256 cm³ vides.

Correction de l’exercice 5 – Remplir à moitié

Le sable forme un pavé de même fond que le récipient, 10 cm sur 10 cm, et de 4 cm de haut :

$$10 \times 10 \times 4 = 400 \text{ cm}^3$$

Le récipient entier mesure $10 \times 10 \times 10 = 1000$ cm³. Le sable en occupe $\frac{400}{1000} = \frac{4}{10}$, ce qui correspond bien à 4 cm sur 10 cm de hauteur.

Réponse. 400 cm³ ; $\frac{4}{10}$ du récipient.

Correction de l’exercice 6 – Construire un grand cube

Le cube de 4 cm d’arête contient $4 \times 4 \times 4 = 64$ petits cubes.

Le cube de 5 cm en contient

$$5 \times 5 \times 5 = 125$$

Il faudrait $125 - 64 = 61$ petits cubes de plus. Augmenter l’arête de 1 cm demande presque autant de cubes que le grand cube de départ.

Réponse. 64 cubes ; 61 de plus.

Correction de l’exercice 7 – Les glaçons

Un glaçon a un volume de $2 \times 2 \times 2 = 8$ cm³. Un bac donne $12 \times 8 = 96$ cm³ de glace.

Pour au moins 500 cm³ : 5 bacs donnent 480 cm³, pas assez ; 6 bacs donnent

$$6 \times 96 = 576 \text{ cm}^3$$

Il faut 6 bacs. On ne peut pas en remplir « un peu plus de cinq » : le nombre de bacs est un entier, et l’on arrondit toujours au-dessus quand il en faut au moins une quantité donnée.

Réponse. 96 cm³ par bac ; 6 bacs.

Correction de l’exercice 8 – Découper un gâteau

Dans chaque direction : $12 \div 3 = 4$, $9 \div 3 = 3$, $6 \div 3 = 2$.

$$4 \times 3 \times 2 = 24 \text{ cubes}$$

Les cubes avec du glaçage sont ceux de la couche du dessus : $4 \times 3 = 12$ cubes. Les 12 autres sont dans la couche du bas. Contrôle : le gâteau mesure $12 \times 9 \times 6 = 648$ cm³ et chaque cube 27 cm³, or $24 \times 27 = 648$.

Réponse. 24 cubes ; 12 avec du glaçage.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 9 – Repérer une erreur

Un cube de 2 cm d’arête contient 2 couches de $2 \times 2 = 4$ petits cubes de 1 cm :

$$2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ cm}^3$$

et non 2 cm³. Dix de ces cubes ont donc un volume de $10 \times 8 = 80$ cm³. L’élève a confondu la longueur de l’arête (en cm) avec le volume (en cm³).

Réponse. 8 cm³ par cube, soit 80 cm³.

Correction de l’exercice 10 – Doubler l’arête

La petite boîte contient $5 \times 5 \times 5 = 125$ cubes. La grande, d’arête 10 cm :

$$10 \times 10 \times 10 = 1000 \text{ cubes}$$

Or $1000 = 8 \times 125$: la grande boîte contient 8 fois plus de cubes. Doubler l’arête double la longueur, la largeur et la hauteur : $2 \times 2 \times 2 = 8$.

Réponse. 8 fois plus.

Correction de l’exercice 11 – Le bac à sable

Le sable forme un pavé de 60 cm sur 40 cm sur 20 cm :

$$60 \times 40 \times 20 = 48\,000 \text{ cm}^3$$

Il faut $48\,000 \div 12\,000 = 4$ sacs. On remarque que le bac n’est rempli qu’aux deux tiers : 20 cm sur 30 cm de profondeur. Le bac plein en demanderait $60 \times 40 \times 30 = 72\,000$ cm³, soit 6 sacs.

Réponse. 48 000 cm³ ; 4 sacs.

Correction de l’exercice 12 – Choisir une boîte

On compte les cubes de chaque boîte :

$$\text{A} : 8 \times 8 \times 8 = 512 \qquad \text{B} : 10 \times 8 \times 6 = 480$$

La boîte A contient 32 cubes de plus que B : c’est elle qu’il faut choisir, même si B est plus longue. Comparer une seule dimension ne suffit jamais : il faut calculer les volumes.

Réponse. La boîte A (512 cubes contre 480).

Correction de l’exercice 13 – Une tour de boîtes

Posées sur leur grande face (15 cm sur 10 cm), les boîtes s’empilent par leur épaisseur de 5 cm : la pile mesure 15 cm sur 10 cm sur $8 \times 5 = 40$ cm.

$$15 \times 10 \times 40 = 6000 \text{ cm}^3$$

Contrôle : une boîte mesure $15 \times 10 \times 5 = 750$ cm³, et $8 \times 750 = 6000$ cm³.

Réponse. $15 \times 10 \times 40$ cm ; 6000 cm³.

Correction de l’exercice 14 – Le terrarium

La terre forme un pavé de 50 cm sur 30 cm sur 10 cm :

$$50 \times 30 \times 10 = 15\,000 \text{ cm}^3$$

Il faut $15\,000 \div 5000 = 3$ sacs. La terre n’occupe que le quart de la hauteur du terrarium (10 cm sur 40 cm), donc le quart de son volume total, 60 000 cm³.

Réponse. 15 000 cm³ ; 3 sacs.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : le coffre à jouets

a) Dans la longueur : $60 \div 20 = 3$; dans la largeur : $40 \div 20 = 2$; dans la hauteur : 2 couches. On range $3 \times 2 \times 2 = 12$ cubes.

b) Le coffre mesure $60 \times 40 \times 40 = 96\,000$ cm³ ; un cube en mousse $20 \times 20 \times 20 = 8000$ cm³.

c) Les 12 cubes occupent

$$12 \times 8000 = 96\,000 \text{ cm}^3$$

exactement le volume du coffre : il est entièrement rempli, sans espace vide, car chaque dimension du coffre est un multiple de 20 cm.

Réponse. a) 12 cubes — b) 96 000 cm³ et 8000 cm³ — c) oui, entièrement.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).