MATHÉMATIQUES

Calcul intégral et calculs d'aires

Terminale maths complémentaires

Intégrale • Aire sous la courbe • $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$ • Relation de Chasles
Valeur moyenne • Aire entre deux courbes • Méthode des rectangles • Monte-Carlo • Archimède

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de l'enseignement optionnel de mathématiques complémentaires de terminale générale** (arrêté du 19 juillet 2019, contenus repris par l'arrêté du 26 février 2026 pour la rentrée 2027), partie « Analyse », section « Intégration », et le thème d'étude « Calculs d'aires ». Il couvre :

- intégrale d'une fonction continue positive sur $[a\,;b]$ comme aire sous la courbe ; notation $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$; relation de Chasles ;
- valeur moyenne d'une fonction continue ; approximation par la méthode des rectangles ;
- intégrale d'une fonction de signe quelconque ;
- théorème : $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable de dérivée f ; calcul $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$;
- aire entre deux courbes ; interprétation dans d'autres disciplines ;
- **algorithmes** : méthode des rectangles, des trapèzes, de Monte-Carlo.

Prérequis : primitives (chapitre « Primitives et équations différentielles »).

Objectif : interpréter une intégrale comme une aire, la calculer à l'aide d'une primitive, l'approcher par la méthode des rectangles et l'utiliser pour calculer une aire ou une valeur moyenne en contexte.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Table des matières

1 Intégrale et aire **3**

2 Approcher une intégrale : la méthode des rectangles **4**

3 Intégrale et primitive **4**

4 Signe quelconque et propriétés **5**

5 Aires et valeurs moyennes **6**

6 Méthode de Monte-Carlo **7**

7 Erreurs classiques **7**

8 Fiche de synthèse **7**

9 Exercices d'application **8**

10 Corrigés des exercices **8**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Intégrale et aire

Unité d'aire

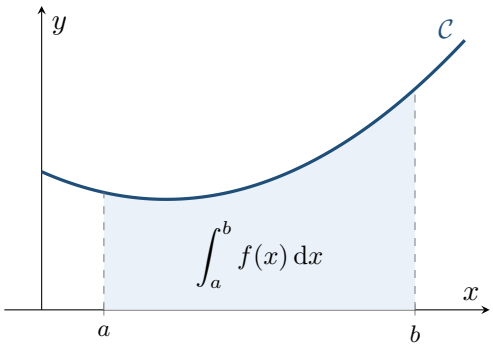
Dans un repère orthogonal $(O\,;I,J)$, l'**unité d'aire** (u.a.) est l'aire du rectangle de côtés OI et OJ. Si une unité vaut 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée, 1 u.a. $= 2$ cm^2.

Intégrale d'une fonction continue positive

Soit f continue et positive sur $[a\,;b]$, de courbe $\mathcal{C}$. L'**intégrale** de a à b de f est l'aire, en u.a., du domaine compris entre $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites $x=a$ et $x=b$. On la note

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

La variable x est « muette » : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.



L'intégrale est l'aire du domaine coloré, sous la courbe et au-dessus de l'axe des abscisses.

Aires de figures connues

$\displaystyle\int_0^4 3\,\mathrm{d}x = 12$ (rectangle 4×3) ; $\displaystyle\int_0^2 x\,\mathrm{d}x = 2$ (triangle de base 2 et de hauteur 2) ; $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ (demi-disque de rayon 1).

Relation de Chasles

Pour f continue et positive et $a \le c \le b$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

L'aire totale est la somme des aires des deux morceaux (additivité des aires).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Approcher une intégrale : la méthode des rectangles

Rectangles

On découpe $[a\,;b]$ en n intervalles de même largeur $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, d'extrémités $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$. Sur chacun, on remplace l'aire sous la courbe par celle d'un rectangle de hauteur $f(x_i)$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x \quad \text{(rectangles « à gauche »)}.$$

Pour une fonction croissante, les rectangles à gauche donnent une valeur par défaut et ceux à droite une valeur par excès : on obtient un **encadrement**. Plus n est grand, plus il est fin. La notation $\int$ (un S allongé, pour « somme ») et le « $\mathrm{d}x$ » rappellent ces sommes de $f(x)\,\Delta x$.

$\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ avec 4 rectangles

$\Delta x = 0{,}25$. À gauche : $0{,}25\left(1+\mathrm{e}^{0{,}25}+\mathrm{e}^{0{,}5}+\mathrm{e}^{0{,}75}\right) \approx 1{,}512$; à droite : $0{,}25\left(\mathrm{e}^{0{,}25}+\mathrm{e}^{0{,}5}+\mathrm{e}^{0{,}75}+\mathrm{e}\right) \approx 1{,}942$. Donc $1{,}512 \leq \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \leq 1{,}942$. La valeur exacte (section 4) est $\mathrm{e}-1 \approx 1{,}718$. La moyenne des deux sommes, 1,727, correspond à la **méthode des trapèzes**.

Algorithme des rectangles

```
from math import exp
def rectangles(f, a, b, n):
    dx = (b - a) / n
    s = 0
    for i in range(n):
        s = s + f(a + i * dx) * dx
    return s
```

`rectangles(exp, 0, 1, 1000)` renvoie 1,717 4 environ.

La quadrature de la parabole

Archimède (III^e siècle av. J.-C.) a calculé l'aire sous la parabole. Avec n rectangles à droite sous $y = x^2$ sur $[0\,;1]$, la somme vaut $\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$, soit 0,385 pour $n = 10$, et elle tend vers $\dfrac{1}{3}$: $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.

3. Intégrale et primitive

La fonction aire est une primitive

Si f est continue sur $[a\,;b]$, la fonction F définie sur $[a\,;b]$ par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable sur $[a\,;b]$ et $F' = f$: c'est la primitive de f qui s'annule en a.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Démonstration (f positive et croissante). Soit x et $h > 0$. $F(x+h) - F(x)$ est l'aire sous la courbe entre x et $x+h$. Comme f est croissante, cette aire est comprise entre celles des rectangles de largeur h et de hauteurs $f(x)$ et $f(x+h)$:

$$h\,f(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq h\,f(x+h), \quad \text{donc} \quad f(x) \leq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq f(x+h).$$

Quand $h \to 0$, $f(x+h) \to f(x)$ par continuité ; par les gendarmes, le taux de variation tend vers $f(x)$. Même raisonnement pour $h < 0$. Donc $F'(x) = f(x)$.

Calcul d'une intégrale

Si f est continue sur $[a\,;b]$ et si F est **une** primitive de f :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b}$$

Calculs d'intégrales

- $\displaystyle\int_0^2 (x^2+1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^2 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3} \approx 4{,}67.$
- $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x]_0^1 = \mathrm{e} - 1.$
- $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_1^{\mathrm{e}} = 1 - 0 = 1$. Plus généralement, $\ln a = \displaystyle\int_1^a \frac{\mathrm{d}t}{t}$: c'est la quadrature de l'hyperbole.
- $\displaystyle\int_0^4 \mathrm{e}^{-0{,}5x}\,\mathrm{d}x = \left[-2\mathrm{e}^{-0{,}5x}\right]_0^4 = 2\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right) \approx 1{,}729.$

4. Signe quelconque et propriétés

Intégrale d'une fonction de signe quelconque

Pour f continue sur $[a\,;b]$, on pose encore $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. Géométriquement, c'est une **aire algébrique** : les parties sous l'axe des abscisses comptent négativement. Ainsi $\int_{-1}^1 x\,\mathrm{d}x = 0$: les deux triangles se compensent.

Propriétés

Pour f et g continues sur $[a\,;b]$ et k réel :

- **linéarité** : $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ et $\int_a^b kf = k\int_a^b f$;
- **positivité** : si $f \geq 0$ sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f \geq 0$;
- **ordre** : si $f \leq g$ sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$;
- Chasles reste vraie, et $\int_a^a f = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

5. Aires et valeurs moyennes

Aire entre deux courbes

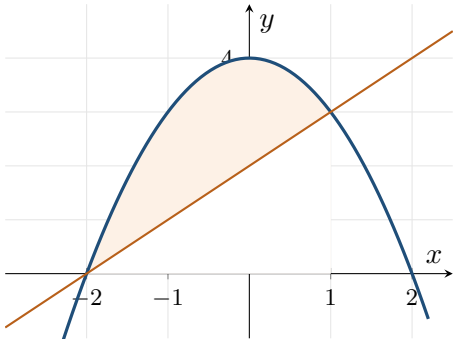
Si $f \geq g$ sur $[a\,;b]$, l'aire du domaine compris entre les deux courbes et les droites $x = a$ et $x = b$ vaut

$$\boxed{\mathcal{A} = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x}.$$

Entre une parabole et une droite

$f(x) = 4 - x^2$ et $g(x) = x + 2$ se coupent quand $4 - x^2 = x + 2$, soit $x^2 + x - 2 = 0$: $x = -2$ ou $x = 1$. Entre les deux, $f \geq g$ (par exemple $f(0) = 4 > g(0) = 2$) :

$$\mathcal{A} = \int_{-2}^{1} \left(-x^2 - x + 2\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \frac{7}{6} - \left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{9}{2} = 4{,}5 \text{ u.a.}$$



Le domaine entre la parabole $y = 4 - x^2$ et la droite $y = x + 2$ a une aire de 4,5 u.a.

Valeur moyenne

La **valeur moyenne** d'une fonction f continue sur $[a\,;b]$ $(a < b)$ est

$$\boxed{\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

C'est la hauteur du rectangle de base $[a\,;b]$ qui a la même aire que le domaine sous la courbe. Si $m \leq f \leq M$ sur $[a\,;b]$, alors $m \leq \mu \leq M$.

Valeur moyenne en contexte

— Une voiture roule à la vitesse $v(t) = t(10 - t)$ m/s pendant 10 s. Vitesse moyenne : $\dfrac{1}{10}\displaystyle\int_0^{10}(10t - t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{10}\left[5t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_0^{10} = \frac{50}{3} \approx 16{,}7$ m/s, et la distance parcourue est $\int_0^{10} v(t)\,\mathrm{d}t \approx 166{,}7$ m.

— La concentration d'un produit dans un bassin vaut $f(t) = \mathrm{e}^{-0{,}5t}$ g/L. Sur les 4 premières heures, la concentration moyenne est $\dfrac{1}{4} \times 2\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right) \approx 0{,}432$ g/L.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

6. Méthode de Monte-Carlo

Estimer une aire par le hasard

Pour estimer l'aire d'un domaine contenu dans un carré d'aire 1, on tire N points au hasard (coordonnées uniformes sur $[0\,;1]$) et l'on compte la proportion de points tombés dans le domaine : c'est une estimation de son aire.

```
from random import random
def monte_carlo(N):
    dedans = 0
    for i in range(N):
        x, y = random(), random()
        if x**2 + y**2 <= 1:
            dedans = dedans + 1
    return 4 * dedans / N
```

Le quart de disque de rayon 1 a pour aire $\frac{\pi}{4}$: la fonction renvoie une valeur approchée de π, par exemple 3,14 pour $N = 10\,000$. La précision s'améliore lentement (il faut multiplier N par 100 pour gagner un chiffre).

7. Erreurs classiques

À éviter

- Calculer $F(a) - F(b)$ au lieu de $F(b) - F(a)$.
- Donner une aire négative : pour une fonction négative, l'aire est $-\int_a^b f$; pour une fonction qui change de signe, on coupe avec Chasles.
- Oublier le facteur $\frac{1}{b-a}$ dans une valeur moyenne.
- Calculer l'aire entre deux courbes sans chercher laquelle est au-dessus, ni les points d'intersection.
- Oublier de convertir les u.a. en cm^2 quand les unités du repère ne valent pas 1 cm.

8. Fiche de synthèse

Définition	$f \geq 0$: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ = aire sous la courbe (u.a.)
Calcul	$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, F primitive de f
Fonction aire	$x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée f
Chasles	$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
Entre deux courbes	$f \geq g$: $\mathcal{A} = \int_a^b (f - g)$
Valeur moyenne	$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$
Rectangles	$\int_a^b f \approx \sum f(x_i)\Delta x$, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

9. Exercices d'application

Exercice 1 – Calculer

Calculer : a) $\displaystyle\int_0^1 (3x^2-2x+1)\,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int_1^4 \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x$; d) $\displaystyle\int_0^1 2x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 – Aire entre deux courbes

Calculer l'aire du domaine compris entre les courbes de $f(x)=x$ et $g(x)=x^2$ pour $x\in[0\,;1]$.

Exercice 3 – Valeur moyenne

La puissance consommée par un appareil est $P(t)=2+\mathrm{e}^{-t}$ kW, t en heures. Calculer la puissance moyenne sur $[0\,;3]$ (au centième).

Exercice 4 – Encadrement

Encadrer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ avec 4 rectangles à gauche et à droite, puis comparer avec $\ln 2$.

10. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. a) $\left[x^3-x^2+x\right]_0^1=1$. b) $\mathrm{e}^{\ln 2}-\mathrm{e}^0=2-1=1$. c) $[2\ln x]_1^4=2\ln 4=4\ln 2\approx 2{,}77$. d) $\left[\mathrm{e}^{x^2}\right]_0^1=\mathrm{e}-1$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. Sur $[0\,;1]$, $x\geq x^2$: $\mathcal{A}=\displaystyle\int_0^1 (x-x^2)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ u.a.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. $\mu=\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^3 (2+\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\left[2t-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^3=\frac{1}{3}\left(6-\mathrm{e}^{-3}+1\right)=\frac{7-\mathrm{e}^{-3}}{3}\approx 2{,}32$ kW.

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. $\Delta x=0{,}25$, points $1\,;1{,}25\,;1{,}5\,;1{,}75\,;2$. La fonction $\frac{1}{x}$ est décroissante : à droite (par défaut) $0{,}25\left(\frac{1}{1{,}25}+\frac{1}{1{,}5}+\frac{1}{1{,}75}+\frac{1}{2}\right)\approx 0{,}634$; à gauche (par excès) $0{,}25\left(1+\frac{1}{1{,}25}+\frac{1}{1{,}5}+\frac{1}{1{,}75}\right)\approx 0{,}760$. On a bien $0{,}634\leq\ln 2\approx 0{,}693\leq 0{,}760$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).